Нек-рые ДС обладают гораздо более сильными свойствами стохастичности, чем перемешивание. Эти свойства можно описать с помощью того же соотношения (3), потребовав на этот раз, чтобы предельный переход был равномерным по тому или иному классу ф-ций. Одно из наиболее сильных свойств указанного типа, называемое К-свойством (в честь А. Н. Колмогорова, к-рый впервые рассмотрел его в кон. 1950-х гг.), допускает неск. эквивалентных формулировок. Одна из них состоит в следующем. Пусть $\{T^t\}$ — каскад или поток, $f(x)$, $x\in X$,— ф-ция с конечным числом значений и $\{f_t,\ -\infty<t<\infty\}$ — порождённый ею стационарный случайный процесс. Для любого s рассмотрим подпространство H_s пространства $L^2(X, \mathscr{A}, \mu)$, определяемое поведением этого процесса до момента s. Оно состоит из ф-ций вида $\varphi(f_{t_1}, ..., f_{t_n})$, $t_1, ..., t_n\leqslant s$, $n=1, 2, ...$ и их пределов в среднем квадратичном. Очевидно, $H_{s'}\subseteq H_{s''}$ при $s'\leqslant s''$, а ф-ции, входящие в H_s при всех s, образуют подпространство $H_{-\infty}$, к-рое естественно связать с поведением процесса в бесконечно далёком прошлом. Процесс f_t наз. регулярным, если $H_{-\infty}$ состоит лишь из констант, т. е. бесконечно далёкое прошлое не несёт информации о процессе. ДС $\{T^t\}$ наз. К-системой (обладает К-свойством), если любой процесс f_t указанного вида регулярен. Аналогичным свойством могут обладать и необратимые ДС (полукаскады и полупотоки). Если полукаскад $\{T^t\}$ обладает этим свойством, то преобразование T^1, порождающее полукаскад, наз. точным эндоморфизмом.

Общие свойства К-систем таковы. Все К-системы имеют положит. энтропию и могут даже быть охарактеризованы в энтропийных терминах (см. ниже); К-система с обращённым временем, т. е. $\{T_1^t\}$, где $T_1^t=T^{-t}$, также является К-системой; если каскад $\{T^n, n=0, \pm1, ...\}$ включён в поток $\{T_1^t,\ t\in R\}$ в том смысле, что $T^n=T_1^{nt_0}$ при нек-ром $t_0\in R$ и любом n, то $\{T^n\}$ и $\{T_1^t\}$ могут быть К-системами только одновременно; наконец, всякая факторсистема К-системы также является К-системой.

Одно из проявлений стохастичности К-систем — свойство «внутр. случайности». Оно состоит в том, что с помощью нек-рого положит. оператора в L^2, обратимого на всюду плотном множестве, можно перевести полугруппу $\{U^t,\ t\geqslant0\}$ *унитарных операторов* (обратимых), отвечающих К-системе, в полугруппу необратимых марковских операторов, сходящихся (в нек-ром смысле монотонно) к пределу при $t\to\infty$.

ДС с наиб. сильными из возможных свойствами стохастичности — это системы Бернулли (Б-системы, названные в честь Я. Бернулли, J. Bernoulli). В случае дискретного времени простейший пример такой системы — семейство сдвигов в пространстве реализаций последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин. Термин «Б-система» (а также «Б-сдвиг» и «сдвиг Бернулли») употребляется по отношению к любой ДС с дискретным временем, изоморфной какой-либо системе описанного вида. Иначе говоря, каскад $\{T^t\}$ является Б-системой, если на его фазовом пространстве $(X, \mathscr{A}, \mu)$ можно задать такую ф-цию (случайную величину) f, что случайные величины f_t, определённые указанным выше способом, независимы, а наименьшая σ-алгебра, относительно к-рой все они измеримы, совпадает с $\mathscr{A}$. В случае полукаскада, когда t принимает лишь неотрицат. значения, говорят об одностороннем Б-сдвиге. ДС с непрерывным временем называется Б-системой, если в неё можно включить Б-систему с дискретным временем. Б-системы обладают всеми перечисленными выше свойствами К-систем и подобно К-системам могут быть охарактеризованы внутр. образом с помощью нек-рого условия перемешивания, но с более сильным, чем в случае К-систем, требованием равномерности. Естественным источником Б-систем служит теория вероятностей, но они встречаются также среди ДС геом., алгебраич. и механич. происхождения.

Среди приведённых выше примеров ДС также имеются Б-системы. Это прежде всего преобразование пекаря — оно изоморфно сдвигу Бернулли, отвечающему последовательности независимых случайных величин с равновероятными значениями 0 и 1. Сдвиг Бернулли, у к-рого состояния не равновероятны или их число больше двух, также можно реализовать как отображение квадрата, похожее на преобразование пекаря. Автоморфизм тора порождает Б-систему в том и только том случае, когда у определяющей его матрицы нет собств. чисел, равных по модулю единице. Один из простейших примеров такой матрицы имеет вид $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Что касается сдвигов на торе, то они не только не являются Б- или К-системами, но даже не обладают свойством слабого перемешивания, а условие их эргодичности состоит в том, что компоненты вектора $\alpha=(1, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ рационально независимы (т. е. линейная комбинация $y_1\alpha_1+...+y_n\alpha_n$ с целыми коэф. $y_1, ..., y_n$ может быть целым числом только в том случае, когда $y_1=y_2=...=y_n=0$).

При исследовании стохастичности ДС иногда удаётся обнаружить ф-ции f, к-рые порождают случайные процессы f_t с достаточно быстрым, напр. экспоненциально быстрым, убыванием при $t\to\infty$ ковариационной функции $K(t)=Ef_{t+s}\bar{f}_s-Ef_{t+s}E\bar{f}_s$ (где E — матем. ожидание, т. е. интеграл по мере μ, а черта означает комплексное сопряжение). Часто оказывается, что те же процессы f_t удовлетворяют *центральной предельной теореме* [в случае дискретн. времени и веществен. ф-ции f последнее означает, что распределение случайной величины $(DS_n)^{-1/2}(S_n-ES_n)$, где $S_n=f_0+...+f_{n-1}$, а $DS_n=E(S_n-ES_n)^2$ — дисперсия, стремится при $t\to\infty$ к нормальному распределению с нулевым матем. ожиданием и единичной дисперсией]. Ф-ции f с этими свойствами могут существовать даже в том случае, когда система обладает не очень явно выраженной стохастичностью, но наличие таких свойств у самых простых и естеств. ф-ций, определённых на фазовом пространстве,— достаточно надёжный признак стохастичности.

Спектр динамической системы

Многие свойства ДС могут быть описаны на языке спектральной теории операторов (см. *Спектр оператора*). Операторы U^t, отвечающие каскаду или потоку $\{T^t\}$, образуют однопараметрич. группу линейных унитарных операторов в гильбертовом пространстве L^2. Эти операторы всегда обладают собств. значением $\lambda=1$ (с собств. ф-циями f=const), составляющим тривиальную часть спектра. По этой причине, говоря о спектре ДС $\{T^t\}$, обычно имеют в виду спектр полугруппы $\{U^t\}$ в инвариантном подпространстве L_0^2, ортогональном к одномерному подпространству констант, причём под спектром понимается не просто набор собственных и квазисобственных чисел, а вся совокупность унитарных инвариантов, т. е. таких характеристик группы операторов, к-рые определяют её однозначно с точностью до унитарной эквивалентности. Общая структура спектра, одинаковая для всех однопараметрич. групп унитарных операторов в L_0^2, определяется совокупностью спектральных мер $\sigma_f, f\in L_0^2$. Мера σ_f находится из соотношения

$$\int_\Delta \exp(i\lambda t)\,\sigma_f(d\lambda)=K_f(t),$$

где $\Delta=[-\pi, \pi)$ в случае каскада, $\Delta=(-\infty, \infty)$ в случае потока и

$$K_f(t)=\int_X (U^tf)(x)\bar{f}(x)\,\mu(dx)$$

— ковариационная ф-ция процесса $f_t=U^tf$. В обоих случаях все меры σ_f (определённые на Δ) конечны. Среди них всегда есть такая $\sigma_{f_0}=\hat{\sigma}$, относительно к-рой всякая другая σ_f задаётся плотностью: $\sigma_f(d\lambda)=p_f(\lambda)\hat{\sigma}(d\lambda)$ (тогда говорят, что σ_f абсолютно непрерывна относительно $\hat{\sigma}$, и пишут $\sigma_f\dashv\hat{\sigma}$; если, кроме того, $\hat{\sigma}\dashv\sigma_f$, то σ_f и $\hat{\sigma}$ наз. эквивалентными). Она наз. мерой максимального спектрального типа. Если подпространство $H(f)\subset L_0^2$, порождённое всеми U^tf, совпадает с L_0^2, то говорят, что $\{U^t\}$ имеет простой спектр. Если существует такая конечная или бесконечная последовательность