Первые эргодич. теоремы были доказаны в нач. 30-х гг. Дж. фон Нейманом (J. von Neumann) и Дж. Биркгофом (G. Birkhoff); наз. они соответственно статистической и индивидуальной эргодич. теоремами. Теорема фон Неймана утверждает, что если квадрат модуля ф-ции f интегрируем по мере μ, то $A_t f$ при $t\to\infty$ сходится в среднем квадратическом к нек-рой ф-ции f^*, т. е.

$$\lim_{t\to\infty}\int_X |(A_t f)(x)-f^*(x)|^2\mu(dx)=0.$$

Согласно теореме Биркгофа (в формулировке, найденной А. Я. Хинчиным,— отсюда часто употребляемое наименование: теорема Биркгофа — Хинчина), для ф-ции f, модуль к-рой интегрируем, имеет место сходимость $(A_t f)(x)\to f^*(x)$ при всех x вне нек-рого множества нулевой меры (в этом случае говорят: при μ-почти всех x, или μ-почти всюду). Если временной параметр t принимает как положительные, так и отрицат. значения, то в обеих эргодич. теоремах можно в качестве A_t брать среднее по отрезку $[-t, 0]$ или по симметричному отрезку $[-t, t]$ (а также по нек-рым отрезкам, зависящим от t более сложным образом), получая при $t\to\infty$ тот же предел f^*.

Т. о., эргодич. теоремы позволяют говорить о предельных временны́х средних или о временны́х средних по бесконечному отрезку времени. Существование последних — признак нек-рой регулярности в поведении траектории ДС, но эта регулярность связана с усреднением, а потому носит лишь статистич. характер. Что касается предельного временно́го среднего, то его можно охарактеризовать в «геом.» терминах, не прибегая к помощи усреднения. Здесь ключевую роль играет понятие инвариантной функции. Так называются ф-ции, постоянные вдоль траекторий почти всех точек фазового пространства. Множества, индикаторы к-рых инвариантны, наз. инвариантными множествами. В пространстве L^2 инвариантные ф-ции образуют линейное подпространство, и предельное временно́е среднее f^* любой ф-ции $f\in L^2$ совпадает с её ортогональной проекцией на это подпространство. Аналогичным образом можно охарактеризовать f^* и в том случае, когда f имеет лишь интегрируемый модуль, т. е. принадлежит пространству L^1.

Существуют многочисленные обобщения классич. эргодич. теорем. Одно из них касается ДС с многомерным временны́м параметром. Если, в частности, t пробегает d-мерное пространство R^d, $d>1$ (система с непрерывным «временем»), или множество целочисленных векторов этого пространства (система с дискретным «временем»), то временно́е среднее по отрезку заменяется средним по соответствующему d-мерному кубу и эргодич. теоремы фон Неймана и Биркгофа остаются справедливыми.

Особый интерес представляет ситуация, когда не существует никаких инвариантных ф-ций, кроме постоянных (почти всюду), или, что то же самое, когда любое инвариантное множество тривиально в том смысле, что либо оно само, либо его дополнение имеет нулевую меру (такое свойство наз. эргодичностью). ДС с этим свойством наз. эргодической (иногда также — метрически транзитивной или метрически неразложимой). В случае эргодич. системы всякое предельное временно́е среднее представляет собой константу, равную пространственному среднему $\int_X f d\mu$. Т. о., гипотеза Больцмана о равенстве временны́х и пространственных средних физ. величин сводится к предположению об эргодичности ДС, описывающей движение по гиперповерхности постоянной энергии. Если на фазовом пространстве ДС определена не только мера, но и метрика (т. е. задано расстояние между любыми двумя точками), причём любой шар имеет положительную меру, то из эргодичности следует, что каждая траектория всюду плотна, т. е. проходит произвольно близко от любой точки («квазиэргодичность»). Обратное, вообще говоря, неверно. Доказательство эргодичности конкретной ДС нередко оказывается весьма трудной задачей, однако общая теория неэргодич. ДС в известном смысле сводится к теории эргодич. систем, т. к. всякая ДС может быть разложена на эргодич. компоненты.

Мультипликативная эргодическая теорема и характеристические показатели

Особое место среди эргодич. теорем занимает мультипликативная эргодическая теорема В. И. Оселедеца (1968), играющая важную роль в приложениях Э. т. Как и классич. эргодич. теоремы, она описывает поведение ф-ций, заданных на фазовом пространстве ДС, вдоль типичных траекторий. Однако на этот раз речь идёт не о скалярных, а о матричных ф-циях, значения к-рых вдоль траектории не складываются, а перемножаются. Если на фазовом пространстве $(X, \mathscr{A}, \mu)$ каскада $\{T^t\}$ задана измеримая ф-ция M со значениями в множестве квадратных *матриц* k-го порядка, то для любого $x\in X$ и любого целого $t\geqslant 0$ естественно рассмотреть произведение $M_t(x)=M(x)\,M(T^1x)\dots\ M(T^tx)$. Аналогом индивидуальной эргодич. теоремы служит утверждение, что при условии

$$\int_X \log^+\|M(x)\|\,\mu(dx)<\infty$$

($^+$ означает, что отрицат. значения log заменяются нулём), запрещающем норме матрицы $M(x)$ при слишком многих x принимать большие значения, для μ-почти всех $x\in X$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty}(M_t'(x)\,M_t(x))^{\frac{1}{2t}}=\Lambda(x)$$

(здесь M' — транспониров. матрица). Структура спектра матрицы $\Lambda(x)$ определяет поведение разл. k-мерных векторов под действием M_t при больших t. Так как $\Lambda(x)$ — симметричная и неотрицательно определённая матрица, все её собственные числа неотрицательны, и, взяв из них только попарно различные, можно расположить их в порядке возрастания: $0<\lambda_1(x)<\dots<\lambda_N(x)$ (N, вообще говоря, зависит от x). Возрастающую цепочку образуют и подпространства $E_0(x)\dots E_N(x)$ пространства R^k, где $E_0(x)$ состоит из одного нулевого вектора, а $E_i(x)$ при $1\leqslant i\leqslant N$ натянуто на все собственные векторы матрицы $\Lambda(x)$ с собственными значениями $\lambda_1(x)\dots\lambda_i(x)$ (очевидно, что $E_N=R^k$). Если вектор $u\in R^k$ лежит в пространстве E_i при $i\geqslant 1$, но не лежит в E_{i-1}, то выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\log\|M_t(x)\,u\|=\log\lambda_i(x). \qquad (1)$$

Числа $\chi_i(x)=\log\lambda_i(x)$ наз. характеристическими показателями. Т. к. $E_N=R^k$, равенство (1) означает, что каждый вектор $u\in R^k$, эволюционирующий под действием M_t, имеет точный характеристич. показатель, совпадающий с одним из $\chi_i(x)$. Собственные числа $\lambda_i(x)$ и, следовательно, $\chi_i(x)$ описывают также эволюцию n-мерных объёмов $V_n(A)$ множеств $A\subset E_n$ ($n=1, \dots, N$): для любого $t>0$ имеет место равенство

$$V_n(M_t(A))=V_n(A)\,(\lambda_1(x)\dots\lambda_n(x))^{t[1+\delta(t)]},$$

где $\delta(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Поэтому произведение $\lambda_1(x)\dots\lambda_n(x)$ можно считать асимптотич. коэф. растяжения n-мерного объёма в пространстве E_n. Как сами $\lambda_i(x)$, так и их кратности $m_i(x)$ — инвариантные ф-ции, поэтому в эргодич. случае все они μ-почти всюду постоянны. Для ДС с непрерывным временем имеет место аналогичная картина, только в этом случае исходным объектом является не $M(x)$, а матричнозначная ф-ция двух переменных $M_t(x)$, аналогичная введённому выше семейству произведений и удовлетворяющая тождеству $M_{t+s}(x)=M_s(T^tx)\,M_t(x)$ (такая ф-ция наз. мультипликативным коциклом над $\{T^t\}$). Мультипликативную эргодич. теорему часто применяют в ситуации, когда ДС $\{T^t\}$ определяется системой нелинейных дифференциальных или разностных ур-ний, а матрица $M_t(x)$ отвечает сдвигу на время t вдоль решений лине-