**ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКИЙ ИНТЕГРА́Л** — интеграл от алгебраической функции I рода, т. е. интеграл вида

$$\int_{z_0}^{z_1} R(z, w)\,dz, \qquad (1)$$

где $R(z, w)$ — рациональная функция от переменных $z$ и $w$, связанных алгебраич. уравнением

$$w^2 = f(z) \equiv a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4, \qquad (2)$$

в к-ром $f(z)$ — многочлен 3-й или 4-й степени без кратных корней. При этом обычно подразумевается, что интеграл (1) нельзя выразить через одни только элементарные функции. В том случае, когда такое выражение возможно, интеграл (1) наз. псевдоэллиптич. интегралом.

Название «Э. и.» связано с тем, что они впервые появились при спрямлении дуги эллипса и других кривых 2-го порядка в работах кон. 17 — нач. 18 вв. Я. Бернулли (J. Bernoulli), И. Бернулли (J. Bernoulli), Дж. К. Фаньяно деи Тоски (G. C. Fagnano dei Toschi), Л. Эйлер (L. Euler) заложили основы теории Э. и. и *эллиптических функций*, возникающих при обращении эллиптич. интегралов.

Любой Э. и. можно выразить в виде суммы элементарных функций и линейных комбинаций канонических Э. и. I, II и III рода. Последние записываются, напр., след. образом:

$$I_1 = \int \frac{dz}{w}, \quad I_2 = \int \frac{z\,dz}{w}, \quad I_3 = \int \frac{dz}{(z-c)\,w},$$

где $c$ — параметр Э. и. III рода.

Дифференциал I рода $dz/w$ конечен всюду на римановой поверхности $F$, соответствующей (2), дифференциалы II и III рода имеют соответственно особенность типа полюса с нулевым вычетом или простого полюса. Рассматриваемые как ф-ции верхнего предела интегрирования при фиксированном нижнем пределе, все три Э. и. на $F$ многозначны.

Подвергая переменную $z$ нек-рым преобразованиям, можно привести ф-цию $w$ и основные Э. и. к нормальным формам.

В приложениях чаще всего встречается нормальная форма Лежандра. При этом

$$w^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2),$$

где $k$ наз. модулем Э. и., $k^2$ иногда наз. лежандровым модулем, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — дополнительным модулем. Обычно имеет место нормальный случай, когда $0 < k < 1$, а $z = x = \sin t$ — вещественная переменная. Э. и. I рода в нормальной форме Лежандра имеет вид

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = F(\varphi, k)$$

и наз. также неполным Э. и. I рода; $\varphi = \operatorname{am} u$ наз. амплитудой Э. и. I рода. Амплитуда есть бесконечнозначная ф-ция от $u$. Обращение нормального интеграла I рода приводит к эллиптич. ф-ции Якоби.

Нормальный интеграл II рода в нормальной форме Лежандра имеет вид

$$\int_0^z \frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\,dt = E(\varphi, k) = E(u);$$

он наз. также неполным Э. и. II рода.

Интегралы

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k) = K, \qquad F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) = K'(k) = K',$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E(k) = E, \qquad E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) = E(k') = E'$$

наз. полными Э. и. соответственно I и II рода. Лежандровы интегралы I рода имеют периоды $4K$ и $2iK'$, II рода — периоды $4E$ и $2i(K' - E')$.

Нормальный интеграл III рода в нормальной форме Лежандра имеет вид

$$\int_0^z \frac{dx}{(1-n^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{dt}{(1-n^2\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} =$$

$$= \Pi(\varphi; n^2, k) = \Pi(u; n^2),$$

где $n^2$ — параметр (чаще всего $-\infty < n^2 < \infty$). При $-\infty < u^2 < 0$ или $k^2 < u^2 < 1$ он наз. циркулярным интегралом, а при $0 < n^2 < k^2$ или $1 < n^2$ — гиперболическим интегралом.

Наряду с эллиптич. ф-циями Э. и. находят многочисленные и важные применения в разл. вопросах анализа и геометрии, физики, в частности механики, астрономии и геодезии. Составлены таблицы Э. и., подробные руководства по теории Э. и. и эллиптич. ф-ций, а также сводки формул.

*Лит.:* Беляков В. М., Кравцова Р. И., Раппопорт М. Г., Таблицы эллиптических интегралов, т. 1—2, М., 1962—63; Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977. *Е. Д. Соломенцев.*

**ЭМИССИО́ННАЯ СПЕКТРОСКОПИ́Я** — методы оптич. спектроскопии (обычно атомной) на основе изучения спектров испускания. Возбуждение атомов происходит в пламени, дуговом или искровом разрядах, лазерным излучением. Э. с. — основа эмиссионного *спектрального анализа.*

**ЭМИССИО́ННЫЙ АНА́ЛИЗ** — см. в ст. *Спектральный анализ.*

**ЭМИ́ССИЯ** акустическая — излучение *упругих волн*, возникающее в процессе перестройки внутренней структуры твёрдых тел. Э. появляется при пластич. деформации твёрдых материалов, при возникновении и развитии в них дефектов, напр. при образовании трещин, при фазовых превращениях, связанных с изменением кристаллич. решётки, а также при резании твёрдых материалов. Физ. механизмом, объясняющим ряд особенностей Э., является движение в веществе *дислокаций* и их скоплений. Неравномерность, прерывистость дислокационных процессов, связанных с отрывом дислокаций от точек закрепления, торможением их у препятствий, возникновением и уничтожением отд. дислокаций, является причиной, обусловливающей излучение волн напряжения, т. е. Э. Соответственно акустич. Э. имеет «взрывной», импульсный характер; длительность импульса может составлять $10^{-8}$—$10^{-4}$ с, энергия отд. импульса — от $10^{-9}$ до $10^{-5}$ Дж.

Сигналы акустич. Э. проявляются в виде колебаний поверхности образца, смещение при к-рых составляет $10^{-14}$—$10^{-7}$ м; иногда эти сигналы достаточно сильны и могут восприниматься на слух. Распространяясь от источника к поверхности образца, сигнал Э. претерпевает существенное искажение вследствие дисперсии скорости звука, трансформации типа и формы волны при отражении, затухания звука и др. Если время затухания сигнала и время переходных процессов в образце меньше промежутка времени между излучаемыми импульсами, Э. воспринимается в виде последовательности импульсов и наз. дискретной или импульсной. Если же интервал между отд. актами излучения меньше времени затухания, Э. имеет характер непрерывного излучения, в подавляющем большинстве случаев нестационарного, и наз. непрерывной или сплошной. Дискретная Э. имеет место, напр., при образовании трещин, непрерывная — в процессе резания. Частотный спектр Э. весьма широк: он простирается от области слышимых частот до десятков и сотен МГц.

Э. используются для получения информации о процессах, происходящих внутри вещества, для неразрушающих испытаний материалов, и в частности для обнаружения дефектов в деталях и конструкциях.

*И. П. Голямина, Г. И. Эскин.*