к-рому световые лучи распространяются между двумя точками a_1 и a_2 по такому пути s, на прохождение к-рого затрачивается наименьшее время t. Более строго принцип Ферма формулируется как вариационная проблема

$$\delta\int_{a_1}^{a_2} n ds = 0,$$

означающая, что длина оптич. пути, по к-рому распространяется свет, экстремальна.

Наименьшего действия принцип Мопертюи (Maupertuis, 1740) в механике, описывающий движение материальных тел в силовых полях, столь же универсален в ЭО и ИО, как принцип Ферма в световой. Он формулируется следующим образом:

$$\delta\int_{a_1}^{a_2} p ds = 0, \qquad (1)$$

где a_1 и a_2 — начальная и конечная точки искомой траектории заряж. частицы, а p — обобщённый импульс, приобретённый ею в электрич. и магн. полях. Для определённости речь далее пойдет об электронах, хотя все приведённые ниже соотношения справедливы и для ионных пучков при замене заряда и массы электрона на соответствующие параметры ионов. Обобщённый импульс электронов

$$\boldsymbol{p} = m_e \boldsymbol{v} - e\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}_0,$$

где $\boldsymbol{v}$, e и m_e — скорость, заряд и масса движущихся электронов соответственно, A — векторный потенциал магн. поля, s_0 — единичный вектор, касательный к траектории. В выражении (1) p имеет смысл показателя преломления среды. Чтобы сделать его безразмерным, как n в оптике, обобщенный импульс относят к начальному импульсу p_0, приобретенному электронами после предварит. ускорения. Из (1) получаем выражение, аналогичное принципу Ферма:

$$\delta\int_{a_1}^{a_2}(p/p_0)ds = \delta\int_{a_1}^{a_2} n ds = 0. \qquad (2)$$

Электронно-оптич. показатель преломления $n \equiv p/p_0$ в электрич. поле зависит только от координат, и такая среда для распространения электронных пучков изотропна. При наличии магн. поля (совместно с электрическим или без него) среда анизотропна, т. к. в этом случае n зависит ещё и от направления движения электронов, тогда

$$n = \frac{1}{p_0}\left(\frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - e\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}_0\right), \qquad (3)$$

где m_0 — масса покоя электрона. Абсолютная величина скорости электрона зависит от потенциала поля φ и её находят с помощью соотношения

$$m_0c^2(1-v^2/c^2)^{-1/2} = e\varphi + m_0c^2. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует:

$$n = \frac{\sqrt{2em_0}}{p_0}\left(\sqrt{\varphi(1+\varepsilon\varphi)} - \gamma\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}_0\right), \qquad (5)$$

где $\gamma = \sqrt{e/2m_0}$, $\varepsilon = e/2m_0c^2$ — релятивистская поправка.

На принципе наименьшего действия (2) построены все осн. соотношения ЭО и ИО, включая и расчёт аберраций методом *эйконала*. Таким же фундаментальным соотношением для ЭО и ИО следует считать и ур-ние Лоренца, с помощью к-рого, рассматривая траектории заряж. частиц (в данном случае электронов), можно вывести те же соотношения, включая и расчёт аберраций:

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = -e(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]); \qquad (6)$$

здесь $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ — вектор напряжённости электрич. поля, а $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ — вектор индукции магн. поля. Базовые соотношения (2) и (6) следуют одно из другого. Так, для вывода (6) из (2) нужно выражение (3) преобразовать так, чтобы неявно входящее в него время t стало независимой переменной; используем для этого соотношения

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}_0 ds = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}dt,\ mv = mv^2\frac{dt}{ds}$$

(точки над x, y, z означают производные по t). Подставляя преобразованный показатель преломления (3) в (2), получаем:

$$\delta\int_{a_1}^{a_2}\frac{1}{p_0}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + e\varphi - e(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)\right]dt = \delta\int L dt = 0, \qquad (7)$$

где A_x, A_y, A_z — проекции векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ на координатные оси. Подынтегральное выражение в (7), обозначенное символом L, есть ф-ция Лагранжа, удовлетворяющая ур-ниям Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0. \qquad (8)$$

Подставляя её в (8) и объединяя три ур-ния в одно векторное, получим ур-ние Лоренца (6). Расчет траекторий с его помощью можно рассматривать как решение чисто механич. задачи движения массы под действием приложенных к ней сил. Решение той же задачи вариационным методом предпочтительнее, если упрощаются расчёты. Так, напр., для вычисления луча (траектории) в электрич. и магн. полях достаточно использовать (5) и, полагая $ds = dz\sqrt{1+(x')^2+(y')^2}$, сформулировать вариационную задачу:

$$\delta\int_{a_1}^{a_2}\left[\sqrt{\varphi(1+\varepsilon\varphi)(1+(x')^2+(y')^2)} - \gamma(x'A_x + y'A_y + A_z)\right]dz = \delta\int_{a_1}^{a_2} L dz = 0;$$

здесь штрихи означают производные по z. Затем с помощью ур-ний Эйлера (8), в к-рых t заменяется на z, можно получить искомые ур-ния луча:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt{\varphi(1+\varepsilon\varphi)}}{\sqrt{1+(x')^2+(y')^2}}x' - \gamma A_x\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\sqrt{1+(x')^2+(y')^2}}{2\sqrt{\varphi(1+\varepsilon\varphi)}}(1+2\varepsilon\varphi) - \\ -\gamma\left(x'\frac{\partial A_x}{\partial x} + y'\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\right), \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt{\varphi(1+\varepsilon\varphi)}}{\sqrt{1+(x')^2+(y')^2}}y' - \gamma A_y\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\sqrt{1+(x')^2+(y')^2}}{2\sqrt{\varphi(1+\varepsilon\varphi)}}(1+2\varepsilon\varphi) - \\ -\gamma\left(x'\frac{\partial A_x}{\partial y} + y'\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial y}\right).\end{gathered} \qquad (9)$$

Дальнейший расчёт возможен, если известно распределение электрич. и магн. полей. При заданных краевых условиях поля вычисляются с помощью ур-ния Лапласа или с помощью ур-ния Пуассона при учёте влияния пространственного заряда. Аналитич. решение найдено лишь в нек-рых простейших случаях. Поэтому для аппроксимации экспериментально измеренных полей предложен ряд функций. Однако большинство задач решается численными методами с помощью ЭВМ. Широко используются методы сеток с прямоугольными (метод конечных разностей) и с треугольными (метод конечных элементов) ячейками. В обоих случаях вычисляют потенциалы при помощи сетки, наложенной на рассчитываемую область поля, включая границы, и формул, связывающих потенциал текущей точ-