известно, классич. траекторию. Т. о., в квазиклассич. пределе в интеграле (4) можно ограничиться классич. траекторией.

Представление амплитуды перехода в виде функционального интеграла естеств. образом обобщается на случай *квантовой теории поля*. Квантовую теорию поля можно рассматривать как механику системы с бесконечным числом степеней свободы. Поле $\varphi(x)$ можно аппроксимировать набором ф-ций $\varphi(x_i)$, отвечающих нек-рой дискретизации пространств. координат x. Амплитуда вероятности того, что система, находившаяся в момент t' в состоянии $\varphi'(x)$, в момент t'' окажется в состоянии φ'', определяется функциональным интегралом

$$\langle\varphi''(x),\, t''\,|\,\varphi'(x),\, t'\rangle = C\int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\mathscr{L}(\varphi)\,dx\,dt\right\}\prod_{x_i}d\varphi(x_i) \qquad (6)$$

(здесь $\mathscr{L}$ — *лагранжиан*). Интегрирование ведётся по всем ф-циям, принимающим в момент t' значение $\varphi'(x)$ и в момент t'' значение $\varphi''(x)$.

Более тщательное исследование показало, что ф-лы (4—6) нуждаются в уточнении. В общем случае амплитуда перехода определяется функциональным интегралом по фазовому пространству:

$$\langle q_i'',\, t''\,|\,q_i',\, t'\rangle = \int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\left[\sum_i p_i\dot{q}_i - H(p_i, q_i)\right]dt\right\}\prod_t\prod_i\frac{dp_i dq_i}{2\pi}. \qquad (7)$$

Здесь q_i и p_i — канонич. координаты и импульсы, $H(p_i, q_i)$ — классич. *Гамильтона функция*. Интегрирование ведётся по всем траекториям, проходящим в момент t' через точки q_i' и в момент t'' через точки q_i''.

Если H квадратична по импульсам:

$$H=\sum_i\left[p_i^2/2m+V(q_i)\right] \qquad (8)$$

(m — масса частицы, V — потенц. энергия), то интегрирование по импульсам можно выполнить явно путём сдвига $p_i(t)\to p_i(t)+m\dot{q}_i$, в результате чего интеграл (7) принимает вид (4—6). В большинстве физ. задач условие (8) выполнено и представление (4—6) справедливо. Однако в общем случае необходимо пользоваться ф-лой (7).

Вычисление функциональных интегралов является очень сложной задачей. Регулярный способ вычисления существует лишь для интегралов гауссова типа, в к-рых подынтегральное выражение представляет собой экспоненту от неоднородной квадратичной формы. Такие интегралы вычисляются с помощью сдвига переменных интегрирования. Т. о., получаем ф-лу

$$\int\exp\left\{i\int\frac{1}{2}\varphi(x)K(x-y)\varphi(y)\,dx\,dy + i\int\varphi(x)\eta(x)\,dx\right\}\prod_x d\varphi(x) = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int\eta(x)K^{-1}(x-y)\eta(y)\,dx\,dy\right\} \qquad (9)$$

(x, y — точки пространства-времени). Здесь оператор $K(x-y)$ — симметричная ф-ция своих аргументов, K^{-1} — обратный оператор, ф-ция $\eta(x)$ описывает внеш. источник. Эту ф-лу можно принять за определение гауссова функционального интеграла и доказать, что определённый так объект действительно обладает свойствами интеграла (допускает интегрирование по частям, замены переменных и т. д.).

Метод функционального интегрирования обобщается и на случай *Ферми — Дирака статистики*. В этом случае нужно считать переменные интегрирования антикоммутирующими и пользоваться правилами интегрирования по ферми-полям (сформулированы Ф. А. Березиным, 1961).

Несмотря на то, что явно вычислить удаётся фактически лишь гауссовы интегралы, этого достаточно для метода теории возмущений в квантовой статистике и квантовой теории поля. С помощью функциональных интегралов были впервые получены правила Фейнмана (см. *Фейнмана диаграммы*) для вычисления *матрицы рассеяния* S в квантовой электродинамике. Осн. ф-лой, используемой в приложениях функциональных интегралов к задачам теории поля и статистич. механики, является представление в а к у у м н о г о с р е д н е г о *хронологических произведений* операторов *(Грина функций)* в виде функционального интеграла

$$\langle T\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\rangle = \frac{\int\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\exp\{iS(\varphi)\}\prod_x d\varphi}{\int\exp\{iS(\varphi)\}\prod_x d\varphi}. \qquad (10)$$

Из этой ф-лы можно получить выражение для S-матрицы и др. интересных физ. объектов.

Метод функционального интегрирования оказался особенно полезен в задачах, в к-рых необходимо суммировать большое (а иногда и бесконечное) число диаграмм. К таким задачам относятся вычисление инфракрасной и ультрафиолетовой асимптотик ф-ций Грина, исследование фазовых переходов, описание коллективных возбуждений в квантовой теории поля и в квантовой статистике.

Особое место занимает метод функционального интегрирования в теории *калибровочных полей*. С его помощью была впервые построена ковариантная теория возмущений для *Янга — Миллса полей* и *квантовой теории гравитации*, доказана перенормируемость неабелевых калибровочных теорий и решён ряд др. важных проблем.

Интегралы по траекториям используются также в классич. задачах теории вероятностей, напр. для анализа случайных шумов и в упоминавшейся теории броуновского движения.

Лит.: Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; Фейнман Р., Хибс А., Квантовая механика и интегралы по траекториям, пер. с англ., М., 1968; Попов В. Н., Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической механике, М., 1976; Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, 2 изд., М., 1988.

А. А. Славнов.

ФУНКЦИОНА́ЛЬНЫЙ ИНТЕГРА́Л (континуальный интеграл, интеграл Фейнмана) — обобщение понятия интеграла на случай бесконечномерных пространств. Об определении и применениях Ф. и. см. в ст. *Функционального интеграла метод*.

ФУ́НКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЯ — ф-ция для описания *распределения* вероятностей значений *случайной величины*. Для всех возможных значений x $(-\infty<x<\infty)$ случайной величины ξ Ф. р.

$$F_\xi(x)=P\{\xi\leqslant x\},$$

где $P\{\xi\leqslant x\}$ — вероятность события $\xi\leqslant x$. Ф. р. $F_\xi(x)$ монотонно не убывает, она непрерывна справа: $F_\xi(x+0)=\lim_{h\to 0}F(x+h)=F_\xi(x)$, и имеет пределы $\lim_{x\to-\infty}F_\xi(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}F_\xi(x)=1$. Если ξ дискретна, то Ф. р. является ступенчатой, увеличиваясь скачкообразно в каждой точке x_k на величину $P(\xi=x_k)$. В случае непрерывной случайной величины ξ вероятность каждого возможного значения x равна $P(\xi=x)$ и Ф. р. становится непрерывной. Если она ещё и дифференцируема, то вводится $P(x)=dF(x)/dx$ — плотность распределения вероятности, называемая также п л о т н о с т ь ю в е р о я т н о с т и или д и ф ф е р е н ц и а л ь н о й Ф. р. Индекс ξ часто опускают.

В более общем случае Ф. р. задаётся не на прямой x, а на множестве значений $x_1, \ldots, x_N$ случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ с учётом явной зависимости Ф. р. от времени.

В физике под Ф. р. обычно понимают плотность распределения вероятностей. Ф. р. в этом смысле — осн. понятие статистич. физики.