Общее решение каждого из написанных линейных однородных ур-ний может быть записано в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = (M_x(s)) \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix}$$

и аналогично для $z(s)$ и $z'(s)$ (с заменой $M_x(s)$ на $M_z(s)$). Элементы матрицы передачи $M(s)$ для произвольной ф-ции $g(s)$ могут быть найдены численным интегрированием. Исследование устойчивости движения существенно упрощается для очень широкого класса периодич. систем, удовлетворяющих условию $g(s+L_0)=g(s)$, где L_0 — период системы (к этому классу относятся фокусирующие системы почти всех кольцевых ускорителей и большей части линейных ускорителей). Для периодич. систем ур-ние поперечного движения превращается в *Хилла уравнение*, устойчивость решения к-рого определяется собств. значениями $\tilde{M}$-матрицы передачи периода. При выполнении условия

$$|\mathrm{Sp}\tilde{M}| = |\tilde{M}_{11} + \tilde{M}_{22}| < 2$$

колебания устойчивы, а собств. значения матрицы $\tilde{M}(s)$ равны $\exp(\pm i\mu)$ (где μ — нек-рое действит. число, определяющее сдвиг фазы колебаний на периоде структуры). Общее решение ур-ния Хилла выражается ф-лой

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)}\cos[\psi(s)+\alpha],$$

где константы a и α определяются нач. значениями x и x'; $\beta(s)$ — т. н. амплитудная функция, зависящая от структуры системы, а фазовая переменная $\psi(s)$ определяется ур-нием

$$\psi(s) = \int_0^s ds'/\beta(s').$$

Ф-ция $\beta(s)$ периодична (с периодом фокусирующей системы). Изменение $\psi(s)$ на длине орбиты, делённое на 2π, определяет число бетатронных колебаний на оборот. Траектория $x(s)$ на каждом периоде колебаний пересекается с косинусоидной траекторией, у к-рой фаза меняется на μ при прохождении элемента периодичности системы (рис. 2). Отсюда видно, что в устойчивой периодич. фокусирующей системе частица совершает «квазипериодические» колебания около положения равновесия. Число этих колебаний на длине оборота в циклич. ускорителе определяется ф-лой $\nu=\mu N/2\pi$, где N — число периодов фокусирующей системы на длине кольца.

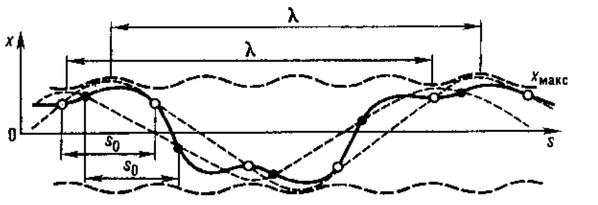

Рис. 2. Траектории произвольной частицы и огибающая пучка в системе фокусировки. В соответствующих точках эта траектория пересекается с косинусоидой (светлые штриховые линии) с длиной волны λ, амплитуда и фаза которой зависят от выбора начала отсчёта (светлые и тёмные кружки). Огибающая траектории частиц пучка представлена жирной штриховой линией.

Т. к. подобные колебания для простейшего случая $g(s)=\mathrm{const}$ были впервые исследованы в бетатроне, то поперечные колебания частиц в циклич. ускорителях часто называют бетатронными, а параметр ν — бетатронной частотой (в англ. литературе — betatron tune). Матем. анализ показывает, что в системах со знакопеременной Ф. при не слишком большой силе фокусирующих элементов ν пропорц. квадрату «силы» линз (произведению градиента поля на длину линзы). Т. о., знакопеременная Ф. является Ф. второго порядка, в связи с чем приходится применять «сильные» фокусирующие элементы (так, в одном из проектов в сверхпроводящих квадрупольных линзах ускорителя SSC градиент магн. поля должен был достигать 212 Тл/м).

Анализ поперечного движения может быть значительно упрощён, если удаётся представить систему Ф. в виде набора «кусочно-постоянных» элементов, для каждого из к-рых $g(s)=\mathrm{const}$. В этом случае матрица передачи каждого из элементов может быть найдена в аналитич. форме, а матрица передачи системы является произведением матриц передачи отд. элементов.

В общем случае, когда колебания по x и z связаны друг с другом, общее решение линеаризованных ур-ний также может быть записано в матричной форме, но $M(s)$ превращается в квадратную матрицу четвёртого ранга. Устойчивость движения по-прежнему определяется корнями характеристич. ур-ния для $\tilde{M}$.

Эмиттанс пучка и аксептанс фокусирующей системы. Решения ур-ний поперечного движения определяют эволюцию пучка в фазовом пространстве. Согласно *Лиувилля теореме*, в консервативной системе фазовый объём, занимаемый пучком в фазовом пространстве координат-импульсов, является интегралом движения. Для несвязанных поперечных колебаний одномерный фазовый объём определяется ф-лой $V_\phi = p\int dx\,dx'$, где интеграл вычисляется по области, занимаемой пучком. Параметр $\varepsilon=\int dx\,dx'$ (обычно делённый на π) в теории ускорителей принято называть эмиттансом пучка.

В силу инвариантности фазового объёма эмиттанс ε при ускорении пропорционален p^{-1}, что приводит к адиабатич. затуханию амплитуды бетатронных колебаний пропорционально $p^{-1/2}$. Поскольку каждый источник частиц характеризуется заданной величиной достижимой фазовой плотности, то для получения макс. интенсивности желательно пропускать через фокусирующую систему пучок с наиб. эмиттансом. Этот наиб. эмиттанс наз. аксептансом фокусирующей системы. Можно показать, что фокусирующая система пропускает макс. эмиттанс в случае «согласованного» пучка, у к-рого макс. размер $x_{\text{макс}}(s)$ всюду пропорционален $\sqrt{\beta(s)}$. Величина аксептанса фокусирующей системы ε равна мин. (по периоду системы) значению параметра $A^2(s)/\beta(s)$, где $A(s)$ — апертура канала.

Возмущения поля. Учёт отклонений поля от идеального приобретает особо важное значение в системах с большой длиной проходимого пути (в кольцевых ускорителях и коллайдерах) или в системах с очень малыми поперечными размерами и малым фазовым объёмом пучка (в линейных электрон-позитронных коллайдерах). Исследование неидеальностей поля приводит к появлению малых дополнит. членов в правой части ур-ний движения. Аналитич. решение этих ур-ний может быть найдено с помощью теории возмущений. При этом решение линеаризованных ур-ний движения в идеальном магн. поле используется в качестве первого приближения. Анализ показывает, что в кольцевых ускорителях неидеальности поля приводят к раскачке колебаний и возникновению поперечных резонансов. Общее условие резонанса имеет вид

$$k_x\nu_x + k_y\nu_y = n,$$

где k_x, k_y, n — целые числа. Параметр $m=|k_x|+|k_y|$ наз. порядком резонанса. Разрушающее действие на пучок, как правило, оказывают резонансы сравнительно низкого порядка ($m\leqslant 4$). Однако в нек-рых накопит. кольцах зарегистрированы динамич. эффекты, вызванные резонансами и более высоких порядков. Для предупреждения гибели частиц на резонансах необходимо правильно выбирать значения бетатронных частот ν_x, ν_y и соблюдать их постоянство в процессе ускорения. Кроме того, в состав фокусирующих систем часто включают секступольные линзы для коррекции хроматических эффектов (зависимости частот бетатронных колебаний от отклонения импульса). В кольцевых ускорителях часто устанавливают также спец. системы коррекции, позволяющие подавлять резонансные гармоники возмущений.