упростить гамильтониан (6), представив его в виде

$$\mathscr{H}=U+\mathscr{H}_0,$$

где

$$U=\frac{1}{2V}\sum_{ff'}J_{ff'}\langle a_f^+a_{-f}^+\rangle\langle a_{-f'}a_{f'}\rangle,$$

$$\mathscr{H}_0=\sum_f\{T_f a_f^+a_f+\frac{1}{2}C_f(a_f^+a_{-f}^++a_{-f}a_f)\},$$

$$C_f=-\frac{1}{V}\sum_{f'}J_{ff'}\langle a_{-f'}a_{f'}\rangle;$$

скобки $\langle...\rangle$ означают усреднение по большому канонич. распределению Гиббса с гамильтонианом $\mathscr{H}_0$, в к-ром уже содержится взаимодействие между коррелированными парами электронов. Оператор $\mathscr{H}_0$ является квадратичной формой относительно операторов a_f^+, a_f, поэтому его можно привести к диагональному виду посредством *Боголюбова канонических преобразований*:

$$a_f=u_f\alpha_f+v_f\alpha_{-f}^+,$$

где u_f, v_f — действительные ф-ции, связь между к-рыми следует из перестановочных соотношений. Тогда получим

$$\mathscr{H}_0=\sum_f\{T_f v_f^2+C_f v_f u_f\}+\sum_f\sqrt{T_f^2+C_f^2}\,\alpha_f^+\alpha_f.$$

Ф-ция C_f определяет энергетич. щель в спектре элементарных возбуждений и удовлетворяет интегральному ур-нию

$$C_f=\frac{1}{2V}\sum_{f'}J_{ff'}\,\mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{T_{f'}^2+C_{f'}^2}}{2T}\right)\frac{C_{f'}}{\sqrt{T_{f'}^2+C_{f'}^2}},\qquad(7)$$

где T — темп-ра в энергетич. единицах. Зависимость от спинов можно исключить, положив $C_f=C_k(-1)^{\sigma-1/2}$. Это ур-ние имеет нетривиальное решение $C_f\neq0$ при темп-рах ниже критической, при к-рой происходит фазовый переход металла в сверхпроводящее состояние. Нормальному состоянию соответствует тривиальное решение $C_f=0$. При темп-ре ниже критической устойчиво сверхпроводящее состояние, а при темп-ре выше критической — нормальное состояние.

Элементарные возбуждения сверхпроводящего состояния образуют идеальный Ф.-г. со спектром

$$E_f=\sqrt{T_f^2+C_f^2}\qquad(8)$$

и с ф-цией распределения

$$\nu_f=\langle\alpha_f^+\alpha_f\rangle=\left\{1+\exp\frac{\sqrt{T_f^2+C_f^2}}{2T}\right\}^{-1}.$$

Интегральное ур-ние (7) можно упростить, положив его ядро постоянным и равным I в слое шириной $2\hbar\omega_D$ (ω_D порядка дебаевской частоты колебаний решётки) и равным нулю вне этого слоя. Тогда энергетич. спектр (8) при темп-ре ниже критической, когда $C_f\neq0$, имеет щель на поверхности Ферми, равную

$$C=\hbar\omega e^{-1/\rho},$$

где $\rho=I(dn/dE)_0$ — безразмерная константа взаимодействия; $(dn/dE)_0$ — плотность состояний электронов на поверхности Ферми. При темп-ре выше критической $C_f=0$ и спектр соответствует идеальному Ф.-г.

Осн. методом исследования квантовых ферми- и бозе-газов служит метод *Грина функций*.

Лит.: Зубарев Д. Н., Двухвременные функции Грина в статистической физике, «УФН», 1960, т. 71, с. 71; Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962; Таулес Д., Квантовая механика систем многих частиц, 2 изд., пер. с англ., М., 1975; Марч Н., Янг У., Сампантхар С., Проблема многих тел в квантовой механике, пер. с англ., М., 1969; Реймс С., Теория многоэлектронных систем, пер. с англ., М., 1976; Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Статистическая физика, ч. 2. Теория конденсированного состояния, М., 1978; Боголюбов Н. Н., Избранные труды по статистической физике, М., 1979, с. 132, 337; Mahan G. D., Many-Particle physics, N. Y.—L., 1981. *Д. Н. Зубарев.*

ФЕ́РМИ — ДИРА́КА РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ (ферми-распределение) — ф-ция распределения по уровням энергии тождественных частиц с полуцелым спином при условии, что взаимодействием частиц между собой можно пренебречь. Ф.— Д. р.— ф-ция распределения идеального квантового газа (*ферми-газа*), подчиняющегося *Ферми — Дирака статистике*. Ф.— Д. р. соответствует максимуму *статистического веса* (или энтропии) с учётом неразличимости тождественных частиц (см. *Тождественности принцип*) и требований статистики Ферми — Дирака. *Д. Н. Зубарев.*

ФЕ́РМИ — ДИРА́КА СТАТИ́СТИКА (ферми-статистика) — квантовая статистика, применяемая к системам тождественных частиц с полуцелым (в единицах $\hbar$) спином. Такие частицы наз. ферми-частицами или *фермионами*. К ним относятся, напр., электроны, нуклоны, ядра с нечётным числом нуклонов. Ф.— Д. с. предложена Э. Ферми (E. Fermi) в 1926. В том же году П. Дирак (P. Dirac) выяснил её квантовомеханич. смысл: волновая ф-ция, описывающая систему из ферми-частиц, антисимметрична относительно перестановок координат и импульсов любой пары частиц. В. Паули (W. Pauli) в 1940 доказал (*Паули теорема*), что тип статистики однозначно связан со спином частиц. В отличие от частиц с полуцелым спином, частицы с целым спином подчиняются *Бозе — Эйнштейна статистике*. Согласно Ф.— Д. с., в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы.

Для идеального газа фермионов (*ферми-газа*) в случае статистич. равновесия ср. число $\bar n_i$ частиц в состоянии i определяется распределением Ферми — Дирака (распределением Ферми):

$$\bar n_i=\left\{\exp\left[(\mathscr{E}_i-\mu)/kT\right]+1\right\}^{-1},\qquad(1)$$

где $\mathscr{E}_i$ — энергия частицы в состоянии i (для нерелятивистской частицы с импульсом p и массой m равная $p^2/2m$); μ — *химический потенциал*, определяемый из условия равенства суммы всех $\bar n_i$ полному числу частиц в системе. При $\exp(-\mu/kT)\gg1$ Ф.— Д. с. переходит в *Больцмана статистику*.

Распределение Ферми — Дирака получается при рассмотрении статистически равновесного состояния идеального ферми-газа как наиб. вероятного состояния, при учёте неразличимости частиц и принципа Паули. Пусть уровни энергии одночастичных состояний сгруппированы по малым ячейкам, содержащим G_i уровней, причём в каждой ячейке можно разместить N_i частиц. Вследствие принципа Паули на каждом уровне может находиться не более одной частицы ($N_i\leqslant G_i$). Частицы считаются тождественными, поэтому их перестановки не меняют состояния. Статистич. вес такого состояния W равен числу разл. распределений частиц по ячейкам:

$$W=\prod_i\frac{G_i}{N_i!(G_i-N_i)!}.$$

Энтропия идеального газа, подчиняющегося Ф.— Д. с., равна

$$S=k\ln W=-k\sum_i G_i\left[\bar n_i\ln\bar n_i+(1-\bar n_i)\ln(1-\bar n_i)\right],$$

где $\bar n_i=N_i/G_i$ — ср. число частиц на уровне i.

Наиб. вероятное состояние идеального ферми-газа можно найти из условия максимума статистич. веса (или энтропии) при заданном полном числе частиц $N=\sum_i N_i$ и энергии $\mathscr{E}=\sum_i\mathscr{E}_iN_i$, при этом оказывается, что $\bar n_i$ определяется распределением Ферми — Дирака (1). Ф-ла (1) следует также из *Гиббса распределения* для идеального ферми-газа с уровнями энергии $\mathscr{E}_n=\sum\mathscr{E}_in_i$, где n_i, согласно Ф.— Д. с., может принимать лишь два значения: 0 и 1.

Важное следствие Ф.— Д. с.— явление квантового вырождения ферми-газа (см. *Вырожденный газ*) при темп-ре $T\sim\mathscr{E}_F/k$ ($\mathscr{E}_F$ — ферми-энергия), однако в отличие от бозе-