$$I_6=\left[\frac{3(n-1)}{2\alpha n}\right]^{6/(5-3n)} I_2^{3(3-n)/(5-3n)}.$$

Поэтому энергия $\mathscr{E}[\psi]$ при фиксированном $I_2=Q$ также имеет минимум, к-рый и реализуется на нек-рой стабильной конфигурации.

Используем метод Захарова — Кузнецова для доказательства существования стабильных солитонов ещё в двух распространённых моделях.

1) *Кортевега — де Фриса уравнение* ($D=1$) $\partial_t\varphi+\partial_x^3\varphi+6\varphi\partial_x\varphi=0$ описывает волны на мелкой воде и допускает законы сохранения энергии

$$\mathscr{E}=\int dx\left[\frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2-\varphi^3\right]=\frac{1}{2}\|\partial_x\varphi\|^2-I_3$$

и импульса $P=\int dx\varphi^2=I_2$. Используя неравенство Гальярдо — Ниренберга — Ладыженской $I_3\leqslant CI_2^{5/4}\|\partial_x\varphi\|^{1/2}$, получаем оценку для энергии снизу:

$$\mathscr{E}\geqslant\frac{1}{2}\|\partial_x\varphi\|^2-CI_2^{5/4}\|\partial_x\varphi\|^{1/2},\quad C=\text{const}.$$

Минимизируя правую часть этого неравенства по $\|\partial_x\varphi\|$, находим $\mathscr{E}\geqslant-C_0I_2^{5/3}$, $C_0=\text{const}$. Т. о., при фиксированном импульсе $P=I_2$ энергия ограничена снизу и имеет минимум, к-рый реализуется на нек-рой устойчивой конфигурации.

2) *Кадомцева — Петвиашвили уравнение* ($D=2$)

$$\partial_x(\partial_t\varphi+6\varphi\partial_x\varphi+\partial_x^3\varphi)=3\partial_y^2\varphi$$

рассматривается как двумерное обобщение ур-ния Кортевега — де Фриса и также допускает законы сохранения энергии

$$\mathscr{E}=\int d^2x\left[\frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2+\frac{3}{2}(\partial_y w)^2-\varphi^3\right],\quad \partial_x w=\varphi,$$

и импульса $P=\int d^2x\varphi^2=I_2$. Воспользуемся неравенством Гёльдера $I_3\leqslant(I_2I_4)^{1/2}$, а также очевидными неравенствами

$$I_4\leqslant 4\int d^2x|\varphi\partial_x\varphi|\int d^2x|\varphi\partial_y\varphi|,$$
$$\int d^2x|\varphi\partial_y\varphi|=\int d^2x|\varphi\partial_{xy}^2 w|\leqslant\int d^2x|\partial_x\varphi||\partial_y w|\leqslant$$
$$\leqslant\|\partial_x\varphi\|\,\|\partial_y w\|,$$

объединяя к-рые, приходим к соотношению $I_3\leqslant 2I_2^{3/4}\|\partial_x\varphi\|\,\|\partial_y w\|^{1/2}$, позволяющему получить оценку для энергии снизу:

$$\mathscr{E}\geqslant\frac{1}{2}\|\partial_x\varphi\|^2+\frac{3}{2}\|\partial_y w\|^2-2I_2^{3/4}\|\partial_x\varphi\|\,\|\partial_y w\|^{1/2}. \quad (18)$$

Минимизируя правую часть в (18) по $\|\partial_x\varphi\|$ и $\|\partial_y w\|$, получаем неравенство $\mathscr{E}\geqslant-(2/3)I_2^3$, означающее, что при фиксированном импульсе $P=I_2$ минимум энергии реализуется на нек-рой стабильной солитонной конфигурации.

4. **Пример применения прямого метода в кинетической теории плазменных солитонов**. Рассмотрим эл.-статич. приближение Власова — Пуассона в одномерном случае ($D=1$). Ур-ния для ф-ции распределения электронов $f(t, x, v)$ и напряжённости электрич. поля в плазме $E(t, x)$ в приближении тяжёлых ионов имеют вид (распределение ионов не зависит от времени)

$$\partial_t f+v\partial_x f-E\partial_v f=0,\quad \partial_x E=1-\int dvf. \quad (19)$$

С учётом граничных условий

$$E(t,\pm\infty)=0,\ f(t,\pm\infty, v)=f_\infty(v),\ \int dvf_\infty(v)=1$$

в системе отсчёта, связанной с центром распределения f_∞, электрич. поле исключается:

$$E(t, x)=-\int_{-\infty}^{x}dx'\int dv'[f(t, x', v')-f_\infty(v')].$$

Пусть невозмущённое решение ур-ний (19) стационарно:

$$f_0=f_0(w,\mu),\quad E_0(x)=-\varphi_0'(x+a),\quad a=\text{const},$$

где $w=v^2/2-\varphi_0(x+a)$ — энергия электрона, $\mu=\operatorname{sign}v$. Т. к. $f>0$, полагаем $f=\chi^2$, $f_0=\chi_0^2$, считая χ_0 решением ур-ния

$$\hat{D}_0\chi_0=0, \quad (20)$$

где $\hat{D}_0=-v\partial_x+E_0\partial_v$. При этом возмущение $\xi=\chi-\chi_0$ с учётом (20) и линеаризованного условия нормировки $\int dx\int dv\chi_0\xi=0$ удобно представить в виде

$$\xi=\hat{D}_0(S(2f_0)^{-1/2}\varphi),\quad S=|\partial_w f_0|^{1/2},$$

считая, что φ удовлетворяет линеаризованному ур-нию

$$\hat{L}\partial_t\varphi=\hat{H}\varphi, \quad (21)$$

где введены операторы

$$\hat{L}=\varepsilon\hat{D}_0,\quad \varepsilon=\operatorname{sign}(\partial_w f_0),\quad \hat{H}=\varepsilon\hat{D}_0^2+vS\int dv'v'S(x, v').$$

Из ур-ния (21) следует, что существует интеграл движения

$$V=\int dx\left[-\int dv\,\varepsilon(\hat{D}_0\varphi)^2+\left(\int dv\,vS\varphi\right)^2\right]. \quad (22)$$

В случае $\varepsilon=-1$ функционал (22) положительно определён, что говорит об устойчивости монотонных по энергии w распределений — теорема Ньюкомба — Гарднера (классич. пример: распределение Максвелла — Больцмана $f_0=Ae^{-w}$). Покажем, что монотонные распределения глобально устойчивы, выбрав функционал Ляпунова

$$V_1=\int dx\left\{\frac{1}{2}E^2+\int dv\left[\frac{1}{2}fv^2+\lambda(f-f_\infty)+G(f)\right]\right\},$$

где λ — множитель Лагранжа, $G(f)$ — нек-рая вспомогательная ф-ция, определяемая из условия стационарности V_1. Из условия $\delta V_1(f_0)=0$ находим $\lambda=-G'(f_0)-w$, или, после дифференцирования по w, $1=S^2G''(f_0)$. Т. о., V_1 — глобально выпуклый функционал. В частности, полагая $\delta f=\sqrt{2}SD_0\varphi$, убеждаемся, что $\delta^2V_1=2V>0$.

Однако если распределение f_0 немонотонно по энергии, то функционал (22) знакопеременный, что говорит о неустойчивости. В самом деле, для функционала Четаева

$$W=V\int dx\int dv\varepsilon F(x, v)(\hat{D}_0\varphi)^2,$$

где F — решение вспомогат. ур-ния

$$\hat{D}_0F=1+\varepsilon F^2\int dvv^2S^2,$$

найдём, что $\dot{W}\geqslant V^2$ в области $V<0$. Т. о., немонотонные распределения неустойчивы по метрикам ρ_0, ρ, где

$$\rho_0^2=\int dx\left[\int dv(1+|F|)(\hat{D}_0\varphi)^2+\left(\int dvvS\varphi\right)^2\right],\quad \rho=\inf_a\rho_0.$$

(Подробное изложение теории прямого метода Ляпунова и его приложений смотри в прилагаемом списке литературы.)

Лит.: Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, 2 изд., Л.—М., 1935; Зубов В. И., Методы А. М. Ляпунова и их применение, Л., 1957; Мовчан А. А., Устойчивость процессов по двум метрикам, «Прикл. матем. и мех.», 1960, т. 24, в. 6, с. 988; Жидков Е. П., Кирчев И. П., Устойчивость решений вида уединенных волн некоторых нелинейных уравнений математической физики, «ЭЧАЯ», 1985, т. 16, в. 3, с. 597; Рыбаков Ю. П., Устойчивость многомерных солитонов в киральных моделях и гравитации, в кн.: Итоги науки и техники, сер. Классическая теория поля и теория гравитации, т. 2, М., 1991, с. 56; Benjamin T. B., Stability of solitary waves, «Proc. Roy. Soc.», 1972, v. 328A, p. 153; Makhankov V. G., Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems), «Phys. Repts», 1978, v. 35, № 1, p. 1; Holm D. D. [a. o.], Nonlinear stability of fluid and plasma equilibrium, «Phys. Repts», 1985, v. 123, № 1—2, p. 1; Shatah J., Strauss W., Instability of nonlinear bound states, «Comm. Math. Phys.», 1985, v. 100, № 2, p. 173; Kuznetsov E. A., Rubenchik A. M., Zakharov V. E., Soliton stability in plasmas and hydrodynamics, «Phys. Repts», 1986, v. 142, № 3, p. 103; Grillakis M., Shatah J., Strauss W., Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I, II, «J. Funct. Anal.», 1987, v. 74, № 1, p. 160; 1990, v. 94, № 2, p. 308. *Ю. П. Рыбаков.*

УСТО́ЙЧИВОСТЬ УПРУ́ГИХ СИСТЕ́М — свойство упругих систем возвращаться к состоянию равновесия после малых отклонений их из этого состояния. Понятие У. у. с. тесно связано с общими понятиями *устойчивости движения* и равновесия. Устойчивость является необходимым условием для любой конструкции. Потеря устойчивости