марк Ю. И., Фуфаев Н. А., Введение в теорию нелинейных колебаний, 2 изд., М., 1987; Постон Т., Стюарт Т., Теория катастроф и ее приложения, пер. с англ., М., 1980; Ланда П. С., Автоколебания в распределенных системах, М., 1983; Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах, под ред. А. А. Самарского и др., М., 1986; Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Введение в нелинейную физику, М., 1988.

Н. А. Кириченко.

УСТО́ЙЧИВОСТЬ КОЛЕБА́НИЙ — см. *Устойчивость движения.*

УСТО́ЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕ́СИЯ: равновесие системы устойчиво, если при малом возмущении система во всё последующее время мало отклоняется от состояния равновесия. В случае механич. консервативной системы достаточное условие У. р. даётся *Лагранжа — Дирихле теоремой.* Строго У. р. определяется и исследуется так же, как и *устойчивость движения.*

УСТО́ЙЧИВОСТЬ СОЛИТО́НОВ — раздел теории *устойчивости движения*, изучающий эволюцию *солитонов*, подверженных нек-рому возмущению в нач. момент времени. В зависимости от типа возмущения и способа его описания различают неск. видов У. с. На практике обычно ограничиваются рассмотрением малых возмущений, т. е. линеаризуют ур-ния движения. Однако такой подход не всегда даёт правильный ответ, как было показано ещё А. М. Ляпуновым, разработавшим строгий метод исследования устойчивости — прямой метод. В применении к солитонам этот метод известен в неск. вариантах: энергетич. метод Арнольда, функциональный метод Захарова — Кузнецова и др. Эти методы отличаются лишь способом доказательства существования минимума функционала Ляпунова.

1. **Основные определения и теоремы прямого метода.** Под солитонами будем понимать регулярные локализованные решения исходных ур-ний, заданных в пространстве размерности D. Пусть поле $\varphi(t, \boldsymbol{x})$: $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^D\to\mathbb{R}^n$, рассматриваемое как элемент банахова пространства B с нормой $d=\|\varphi\|_B$, подчиняется ур-нию эволюции

$$\partial_t\varphi=\hat{F}(\varphi), \tag{1}$$

где $\hat{F}$ — нек-рый нелинейный оператор. Будем предполагать, что ур-ние (1) при заданных нач. условиях $\varphi(0, \boldsymbol{x})=\varphi_0(\boldsymbol{x})$ допускает единств. решение солитонного типа:

$$\varphi(t, \boldsymbol{x})=\hat{S}_t[\varphi_0],$$

где $\hat{S}_t$ — эволюционный оператор с полугрупповыми свойствами, т. е.

$$\hat{S}_{t_1}[\hat{S}_{t_2}[\varphi_0]]=\hat{S}_{t_1+t_2}[\varphi_0],\ t_i\geqslant 0.$$

Понятие устойчивости заданного невозмущённого движения (солитона) $\varphi=u(t, \boldsymbol{x})$ тесно связано с понятием корректности *Коши задачи* по Адамару. Чтобы его определить, введём две *метрики* в пространстве ф-ций, описывающие возмущения поля

$$\xi(t, \boldsymbol{x})=\varphi(t, \boldsymbol{x})-u(t, \boldsymbol{x}).$$

Именно, пусть метрика $\rho_0(\xi_0)$ задаёт расстояние в пространстве нач. возмущений ξ_0, а метрика $\rho(\xi)$ — в пространстве текущих возмущений ξ. В обычных предположениях $\rho_0(\xi)>\rho(\xi)$ [говорят, что метрика ρ_0 жёстче (сильнее), чем метрика ρ]. Задача Коши для ур-ния (1) наз. корректной по Адамару, если для любого $t\in[0, T]$, $T<\infty$, из $\rho_0(\xi_0)\to 0$ следует $\rho(\xi)\to 0$. Солитонное решение u наз. устойчивым в смысле Ляпунова по метрикам ρ_0, ρ, если для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что из $\rho_0(\xi_0)<\delta$ вытекает неравенство $\rho(\xi)<\varepsilon$ при $t>0$. Т. о., корректность по Адамару — это устойчивость на конечном интервале времени T. Наконец, решение u асимптотически устойчиво по Ляпунову, если оно устойчиво и $\rho(\xi)\to 0$ при $t\to\infty$.

Однако в физике солитонов приходится иметь дело не с одним солитонным решением $u(t, \boldsymbol{x})$, а с нек-рым их множеством $U=\{u\}$, задаваемым обычно групповыми параметрами α, т. е.

$$U=\{\hat{T}_g(\alpha)u|g\in G\},$$

где G — группа симметрии задачи, $\hat{T}_g$ — оператор представления (см. *Представление группы*). В таком случае текущая метрика понимается уже как $\inf\limits_{u\in U} d(\varphi-u)$, т. е. как расстояние от φ до множества U — *орбиты* группы G, а устойчивость наз. орбитальной.

На практике часто ограничиваются линеаризованными ур-ниями:

$$\partial_t\xi=\hat{A}\,\xi=\hat{F}'(u)\xi. \tag{2}$$

Устойчивость для линейной задачи (2) наз. линеаризованной устойчивостью или устойчивостью в первом приближении, а для полного ур-ния (1) — нелинейной устойчивостью. Ясно, что из нелинейной устойчивости вытекает устойчивость в первом приближении, но, вообще говоря, в более слабой метрике. Обратное же верно, если только $\operatorname{Re}\lambda<0$, $\lambda\in\sigma(\hat{A})$, где $\sigma(\hat{A})$ — *спектр оператора* $\hat{A}$. При этом говорят о спектральной устойчивости, если $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$, и о нейтральной, если $\operatorname{Re}\lambda=0$.

Заметим, что из линеаризованной устойчивости вытекает спектральная, т. к. если бы было $\operatorname{Re}\lambda>0$, то существовали бы растущие моды. Обратное неверно, что подтверждается следующим примером из механики. Гамильтониан $H=p^2/2+q^4/4$ приводит к ур-нию движения $\ddot{q}=-q^3$, для к-рого линеаризованное ур-ние $\ddot{\xi}=0$ имеет спектр $\lambda=0$ (нейтральная устойчивость). Однако его решение $\xi=at+b$ линейно растёт, т. е. наблюдается линеаризованная неустойчивость, хотя исходная система нелинейно устойчива. Т. о., линеаризованная система оказывается устойчивой только по скоростям, или в более слабой метрике.

Известно также, что из спектральной неустойчивости для широкого класса систем вытекает нелинейная неустойчивость. Напр., это верно для систем (1) со свойством $\partial_t u=0$, $\|\hat{F}(\varphi)-\hat{A}(\xi)\|_B\leqslant C\|\xi\|_B^p$, $p>1$.

Сформулируем осн. теорему прямого метода.

Теорема Ляпунова — Мовчана об устойчивости (1960). Для устойчивости решения $u\in U$ по метрикам ρ_0, ρ необходимо и достаточно, чтобы в нек-рой его окрестности $\rho_0<a$ существовал функционал Ляпунова $V[\varphi]$ со следующими свойствами: V положительно определён по метрике ρ, непрерывен по метрике ρ_0, не растёт со временем вдоль траектории движения.

Условия теоремы означают, что существуют две непрерывные монотонно растущие ф-ции $m(\rho)>0$ и $M(\rho_0)>0$, $m(0)=M(0)=0$, называемые соответственно нижней и верхней ф-циями сравнения, такие, что справедливы неравенства

$$m(\rho)\leqslant V[\varphi]-V[u]\leqslant M(\rho_0). \tag{3}$$

Пусть $\rho_0<\delta$, тогда из (3) вытекает, что $M(\delta)>M(\rho_0)\geqslant m(\rho)$, откуда $\rho<\varepsilon$, т. е. движение устойчиво.

Выбор метрик ρ и ρ_0 диктуется видом функционала Ляпунова. Пусть V — аддитивный функционал, т. е.

$$V[\varphi]=\int d^D xF(\varphi, \dot{\varphi}, \nabla\varphi),\ \dot{\varphi}\equiv\partial_t\varphi, \tag{4}$$

и решение u является его критич. точкой. Тогда $\delta V[u]=0$, и поэтому справедливо представление

$$V[u+\xi]=V[u]+\int\limits_0^1 ds(1-s)\,\delta^2 V[u+\xi s].$$

Если же V — глобально выпуклый функционал, то $\delta^2 V[u+s\xi]>0$. Это позволяет выбрать в качестве текущей метрики

$$\rho(\xi)=\Big(\int\limits_0^1 ds(1-s)\,\delta^2 V[u+s\xi]\Big)^{1/2}. \tag{5}$$

В этом и состоит метод В. И. Арнольда (1965), в к-ром полагается $V=H+C$, где H — гамильтониан (энергия), а C — нек-рый интеграл движения (инвариант Казимира), выбираемый так, чтобы $\delta V[u]=0$. Т. о., выбор метрики определяется структурой $\delta^2 V$, согласно (5). Отметим, что представление (4) удобно в тех случаях, когда ур-ния движения содержат вторую производную по времени.