с увеличением расстояния вдоль потока) удаётся обнаружить последовательность бифуркаций, хотя и более сложных, чем в течении Тейлора — Куэтта.

Статистический подход. Систематич. исследованиям статистич. свойств Т. положили начало наблюдения О. Рейнольдса (O. Reynolds, 1883) перехода от упорядоченного ламинарного течения к неупорядоченному *турбулентному течению* жидкости в трубе. Осознание того факта, что структура течения оказывается непредсказуемой и непостижимой в деталях, привело к потребности усреднённого описания. Матем. выражением такого описания явились ур-ния Рейнольдса:

$$\frac{\partial U_j}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}U_jU_k=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\delta_{jk}P+T_{jk}+\tau_{jk}\right).$$

Здесь плотность несжимаемой жидкости положена равной единице; $T_{jk}\equiv\nu(\partial U_j/\partial x_k+\partial U_k/\partial x_j)$ — тензор вязких напряжений (ν — кинематич. вязкость); $\tau_{jk}=-\langle u_ju_k\rangle$ — тензор рейнольдсовых напряжений; P, U_j — давление и компоненты скорости, получающиеся после усреднения; скобки $\langle\ \rangle$ означают операцию усреднения, конкретное определение к-рой зависит от характера решаемой задачи, напр. это может быть усреднение по мелким масштабам или быстрым движениям; u_j — пульсации скорости относительно усреднённых значений, удовлетворяющие ур-ниям

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(U_iu_k+U_ku_i)+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-u_iu_k-\tau_{ik}\right).$$

Усреднение, по Рейнольдсу, не является самосогласованной процедурой. Число переменных оказывается больше, чем число ур-ний. Получение ур-ния для τ_{jk} последовательным умножением ур-ний для u_j на u_k и усреднением ведёт к иерархии ур-ний, зависящих от высших моментов $\tau_{jk\dots i}$, и порождает т. н. проблему замыкания. Обычно эта проблема разрешается с помощью разного рода гипотез относительно статистич. свойств пульсаций скорости, позволяющих выразить высшие моменты через низшие с сохранением свойств симметрии ур-ний. Хотя такие гипотезы не всегда корректны и мало полезны в идейном плане, они позволяют с помощью ур-ний Рейнольдса получать важные практич. результаты, касающиеся свойств усреднённых полей в турбулентных пограничных слоях и течений в гладких и шероховатых трубах.

Наиб. очевидной и подчас технически наиб. важной особенностью турбулентного течения жидкости является существенно больший по сравнению с ламинарным перенос вещества, импульса и энергии. В др. средах Т., как правило, также приводит к интенсификации *переноса явлений*, хотя физ. механизмы аномально высоких коэффициентов переноса в разных средах, естественно, различны. В частности, именно обнаружение в кон. 40-х гг. аномальной диффузии плазмы поперёк магн. поля, связанной с пульсациями электрич. поля, послужило началом проникновения понятия Т. в физику плазмы.

Наиб. ранние попытки описать турбулентное перемешивание были предприняты в гидродинамике с использованием моделей, опирающихся на аналогию с ламинарным течением. Началом такого подхода послужила работа Дж. Буссинеска (J. Boussinesq, 1877), к-рый (по совр. терминологии) связал напряжения Рейнольдса τ_{ij} со ср. скоростью U в случае изменения скорости лишь в поперечном к её вектору, y-направлении, $\tau=\nu_{\tau}dU/dy$. Коэф. пропорциональности ν_{τ} аналогичен коэффициенту вязкости, связывающему вязкие напряжения T_{jk} со ср. скоростью, и поэтому получил назв. турбулентной вязкости. Его величина $\sim\langle u^2\rangle^{1/2}l$ (l — эмпирически определяемый масштаб Т.) обычно значительно превосходит величину молекулярной вязкости и может изменяться в пространстве и времени.

Дж. Тейлор (G. Taylor, 1921), исследуя перенос частиц Т., нашёл закон $\langle x^2\rangle\sim 2Dt$, где $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t)$ — положение меченой частицы в момент времени t, имевшей нач. положение $\boldsymbol{a}$ (ср. скорость полагается отсутствующей, $\langle\boldsymbol{x}\rangle=0$). Эфф. коэффициент диффузии (в изотропной Т., см. ниже)

$$D=\frac{1}{3}\int\langle U(\boldsymbol{a},t)\,U(\boldsymbol{a},t+\tau)\rangle\,dt,$$

где $U=dx/dt$ — лагранжева скорость частицы. Появление в этом выражении временно́й ф-ции корреляции скорости очень существенно — тейлоровское описание турбулентной диффузии содержит первые ростки статистич. подхода к Т. В дальнейшем (1935) Тейлор сформулировал проблему Т. в терминах *корреляционных функций* эйлеровых скоростей. Однако в общем виде идея о том, что корреляц. ф-ции (и др. статистич. моменты гидродинамич. полей) являются осн. характеристиками турбулентного движения, была высказана ещё раньше Л. В. Келлером и А. А. Фридманом (1924), предложившими общий метод построения (на основе ур-ний движения реальной жидкости) интегро-дифференц. ур-ний для моментов произвольного порядка гидродинамич. полей турбулентных течений. Получаемая с помощью этого метода полная бесконечная система ур-ний для всевозможных моментов даёт аналитич. формулировку проблемы Т. Однако любая конечная подсистема этой системы ур-ний, как и в случае ур-ний Рейнольдса, не замкнута.

К о л м о г о р о в с к и й с п е к т р Т. Одним из замечательных достижений статистич. подхода является теория Колмогорова однородной изотропной Т., т. е. Т., статистич. характеристики к-рой в произвольной системе точек $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2,\dots,\boldsymbol{r}_N$ не меняются при любых параллельных переносах, поворотах и зеркальных отображениях системы, сопровождающихся одноврем. поворотом или зеркальным отражением системы координат. Эта теория объединяет ряд гипотез и результатов [А. Н. Колмогоров, 1941; А. М. Обухов, 1941; несколько позже, но, по-видимому, независимо — Л. Онсагер (L. Onsager), 1945; В. Гейзенберг (W. Heisenberg), 1948; К. Вейцзекер (C. Weizsäcker), 1948], связанных с универсальностью спектров в т. н. инерционном интервале (см. ниже). Матем. предпосылкой теории Колмогорова является *масштабная инвариантность* (скейлинг) *Навье — Стокса уравнений* (в пределе исчезающей вязкости) относительно одноврем. замены длины $l\to\lambda l$, времени $t\to\lambda^{1-h}t$ и скорости $u\to u^h$, где h — произвольный показатель. Колмогоровская теория основывается на следующих предположениях: 1) масштабная инвариантность предполагается лишь в статистич. смысле — масштабно-инвариантными являются только усреднённые величины; 2) имеется конечный поток энергии ε от бо́льших масштабов к меньшим; 3) поток энергии ε_l на масштабах l предполагается зависящим только от величин, имеющих тот же масштаб l (в частности, от l и скорости u_l в вихрях масштаба l). Поскольку ε_l имеет размерность энергии единицы массы в единицу времени, анализ размерности даёт $\varepsilon_l\sim u_l^3/l$, из чего следует, что $\varepsilon\sim\lambda^{3h-1}$. Тогда масштабная инвариантность ε означает, что $h={}^1/_3$. Масштабная инвариантность нарушается на больших масштабах L, сравнимых с размерами течения, где сказывается механизм возбуждения Т., и на малых l_d [$l_d\sim(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ — к о л м о г о р о в с к и й д и с с и п а т и в н ы й м а с ш т а б], где сказывается вязкость. Интервал $l_d\ll l\ll L$, на к-ром применимы соображения подобия, наз. и н е р ц и о н н ы м и н т е р в а л о м (рис. 5).

Важными следствиями масштабной инвариантности (с $h={}^1/_3$) в инерц. интервале являются: структу́рная ф-ция порядка p, определённая как среднее от p-й степени разности скоростей Δu_l, измеренных в точках, отстоящих на расстояние l, степенным образом зависит от этого расстояния: $(\Delta u_l)^p\sim\varepsilon^{p/3}l^{p/3}$; спектральная плотность энергии Т., определяемая *Фурье преобразованием* структурной ф-ции второго порядка, удовлетворяет закону $E(k)=c\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$, где k — волновое число, а c — постоянная Колмогорова (скейлинг не определяет величины этой константы); вихревая вязкость на масштабе l определяется соотношением $\nu_l\sim lu_l\approx\varepsilon^{1/3}l^{4/3}$.