ного обменного взаимодействия ($\alpha=x, y, z$); для частных значений констант J_α модель XYZ сводится к более простым точно решаемым моделям.

1. Модель Изинга ($J_x=J_y=0,\ J_z\neq 0$) точно решается, напр., методом трансфер-матрицы, или матрицы переноса (см. ниже), не только для обменного взаимодействия, но и в более общем случае при включении в гамильтониан внеш. магн. поля H; этот метод также оказывается весьма полезным при решении ряда других Т. р. м.

Свободная энергия модели Изинга определяется наибольшим из двух собств. значений трансфер-матрицы. Однако при $T=H=0$ оба собств. значения совпадают, обращая при этом корреляц. длину в бесконечность. Это означает, что в одномерной модели Изинга точка $T=H=0$ является *критической точкой*. Полученный результат есть следствие общей теоремы теории фазовых переходов, согласно к-рой дальний порядок (см. *Дальний и ближний порядок*) в системе возникает только тогда, когда наибольшее собств. значение трансфер-матрицы асимптотически вырождено. Такое поведение согласуется также с тем, что для одномерных систем с взаимодействием конечного радиуса вклад в свободную энергию от энтропийного слагаемого преобладает, и упорядоченное состояние оказывается термодинамически неустойчивым. В случае же с бесконечным радиусом взаимодействия собств. значения трансфер-матрицы становятся вырожденными, что соответствует фазовому переходу. Каждый спин системы при этом взаимодействует со всеми остальными спинами, так что вся цепочка представляет собой единый кластер, т. е. модель преобразуется в решётку с бесконечным координац. числом (т. н. бесконечномерная модель), для к-рой точным оказывается *среднего поля приближение*.

Несмотря на чрезвычайную простоту, модель Изинга позволяет продемонстрировать два очень существ. факта для теории фазовых переходов: во-первых, одномерные системы имеют критич. точку, в к-рой темп-ра T и магн. поле H равны нулю, и, во-вторых, критические показатели физ. величин вблизи критич. точки удовлетворяют гипотезе подобия.

2. XY-модель ($J_x=J_y\neq 0,\ J_z=0$) сводится к другой Т. р. м.— знаменитой двумерной модели Изинга, точное решение к-рой в 1944 нашёл Л. Онсагер (L. Onsager) (см. *Изинга модель*).

3. XXX-модель ($J_x=J_y=J_z=J$)—изотропная модель Гейзенберга. Решение получено Г. Бете в 1931 [1]. Использованный им метод решения в дальнейшем получил назв. анзатц или подстановка Бете. Следуя этому методу, рассмотрим состояние цепочки с m спинами, ориентированными вниз, и $N-m$ спинами, ориентированными вверх. Пусть $x_1<x_2<...<x_N$—координаты узлов со спинами вниз ($1\leqslant x_i\leqslant N$). Произвольная волновая ф-ция Φ_m с заданным полным спином, т. е. с определённым числом m спинов, ориентированных вниз, должна быть суперпозицией всех состояний $|x_1...x_m\rangle$ с конкретным указанием узлов $x_1,...,x_m$, в к-рых располагаются ориентированные вниз спины:

$$\Phi_m=\sum_{x_1<x_2<...<x_m}\alpha(x_1...x_m)|x_1...x_m\rangle. \qquad (2)$$

Суммирование здесь ведётся по всем разл. способам размещения m номеров по N узлам. Коэф. $\alpha(x_1...x_m)$ можно найти, действуя на Φ_m гамильтонианом $\mathscr{H}$. Решение представляется в виде

$$\alpha(x_1...x_m)=\sum_P A_P\exp\left(i\sum_{j=1}^{m}p_{Pj}x_j\right), \qquad (3)$$

где $p_1,...,p_m$—нек-рая совокупность неравных чисел, а P—произвольная перестановка этих m чисел. Амплитуды A_P связаны с амплитудой $A_0=A_{12...m}$, отвечающей тождественной перестановке, соотношением

$$A_P/A_0=\pm\exp\{-i\sum\theta(p_j,p_i)\}, \qquad (4)$$

где суммирование θ-факторов ведётся по всем парам индексов у амплитуды, к-рые необходимо транспонировать, чтобы прийти к правильной расстановке индексов, т. е. к амплитуде A_0 (j и i—индексы конкретной транспонируемой пары). Знак в (4) определяется чётностью или нечётностью перестановки P. Фазовый θ-фактор имеет вид

$$\theta(p_1,p_2)=2\operatorname{acrtg}\left[\frac{\Delta\sin[(p_1-p_2)/2]}{\cos[(p_1+p_2)/2]-\Delta\cos[(p_1-p_2)/2]}\right],$$

где $\Delta=\operatorname{sign}J$.

Собств. значение гамильтониана, соответствующее ф-ции Φ_m, записывается в виде

$$E=-N\frac{\Delta}{2}+\sum_{j=1}^{m}2(\Delta-\cos p_j). \qquad (6)$$

Числа p_i, характеризующие собств. значения и собств. ф-ции гамильтониана, представляют собой *квазиимпульсы*, и для их определения необходимо учесть граничные условия, выражающие тождественность состояния на узле x и $N+x$, т. е. замыкание цепочки. В результате система ур-ний на числа $p_1,...,p_m$ примет вид

$$Np_j=2\pi I_j-\sum_{i=1}^{m}\theta(p_j,p_i), \qquad (7)$$

где для m чётных I_j—полуцелые, а для m нечётных I_j—целые числа. Дальнейший анализ ур-ний зависит от знака обменного взаимодействия J.

Для $J>0$, отвечающему ферромагн. осн. состоянию, Бете нашёл собств. ф-ции гамильтониана и определил спектр элементарных возбуждений. Ими оказались *спиновые волны* и m-частичные спиновые комплексы (связанные состояния m перевёрнутых спинов в ферромагн. цепочке). Однако наиб. успех в XXX-модели достигнут в случае антиферромагн. цепочки ($J<0$), для к-рой этим методом вычислена энергия осн. состояния и найден спектр элементарных возбуждений.

4. XXZ-модель ($J_x=J_y$), или модель Гейзенберга—Изинга, точно решается методом анзатца Бете и сводится к двумерной, т. н. шестивершинной, модели, к-рая, в свою очередь, известна также как модель типа льда на квадратной решётке (см. *Двумерные решёточные модели*). Связь этих моделей позволяет использовать результаты, полученные для шестивершинной модели в случае XXZ-модели. Преимущество классич. двумерной шестивершинной модели перед одномерной квантовой XXZ-моделью заключается в том, что для решения двумерной модели удобно использовать метод трансфер-матрицы.

5. Анизотропная XYZ-модель связана с другой классич. двумерной моделью на квадратной решётке, а именно с восьмивершинной моделью. Точное решение классич. двумерной восьмивершинной модели—крупнейшее достижение в области точно решаемых моделей—получено в 1972 Р. Бакстером [2]. Он обнаружил противоречие с гипотезой универсальности и независимости критич. показателей от деталей взаимодействия. Решение восьмивершинной модели позволило вычислить энергию осн. состояния и найти спектр элементарных возбуждений XYZ-модели.

Т. о., основополагающей идеей метода исследования точно решаемых одномерных квантовых систем является анзатц Бете (с соответствующим усложнением при переходе к более сложным моделям). С матем. точки зрения точное решение восьмивершинной модели потребовало нетривиального обобщения анзатца Бете. Бакстер установил фундам. соотношение для факторизованной трёхчастичной матрицы рассеяния, к-рое сейчас известно как ур-ние Янга—Бакстера (см. ниже). Общность и содержательность этого ур-ния особенно проявилась в создании в 1979 Л. Д. Фаддеевым и его сотрудниками [3] квантового метода обратной задачи (КМОЗ)—алгебраич. варианта анзатца Бете. КМОЗ является естеств. развитием классич. *обратной задачи рассеяния метода*, к-рый позволил найти обширный класс двумерных нелинейных эволюционных ур-ний, имеющих точное решение.