магн. поля, $D_\mu\varphi(x)=(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi(x)$ — *ковариантная производная*, $a_0=\mathrm{const}$. Комплексное хиггсовское поле $\varphi(x)=\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)$ можно рассматривать, напр., как параметр порядка сверхпроводящей среды, а пространство вырождения в этом случае совпадает с многообразием классич. вакуумов $|\varphi|^2=a_0^2$, т. е. $D=S^1$. На этом основании можно предположить наличие стабильных Т. с. типа вихрей, т. к. $\pi_1(D)=\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$. Ур-ния Эйлера — Лагранжа для (7)

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}=\frac{ie}{2}(\varphi^*\partial_\mu\varphi-\varphi\partial_\mu\varphi^*)+e^2A_\mu\varphi^*\varphi,$$
$$(\partial_\mu-ieA_\mu)(\partial^\mu+ieA^\mu)\varphi=-\lambda\varphi(\varphi\varphi^*-a_0^2) \qquad (8)$$

действительно допускают вихревые решения, т. н. вихри Нильсена — Олесена, на статических цилиндрически-симметричных полевых конфигурациях

$$A_0=A_3=0,\ A_i(x_1,x_2)=\varepsilon_{ij}\frac{B(\rho)}{\rho},\ i,j=1,2,$$
$$\varphi(x_1,x_2)=f(\rho)\exp\{i\chi(\theta)\}, \qquad (9)$$

где $\rho=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$, $\theta=\mathrm{arctg}\,(x_2/x_1)$. Естественное условие отсутствия токов на бесконечности $\partial^\mu F_{\mu\nu}\to 0$ при $\rho\to\infty$ влечёт в силу (8) и (9) $A_i\to-(1/e)\,\partial_i\chi(\theta)$. В результате магн. поток Φ через плоскость (x_1, x_2) запишется как

$$\Phi=\int d^2xF_{12}=\oint_\gamma dx^iA_i(x)=-\frac{1}{e}\oint_\gamma dx^i\partial_i\chi.$$

Требование однозначной определённости поля Хиггса φ выполнено тогда (и только тогда), когда при обходе линии вихря по любому замкнутому контуру γ фаза χ изменяется на $2\pi N$, следовательно,

$$\Phi=\frac{1}{e}[\chi(2\pi)-\chi(0)]=\frac{2\pi N}{e};\ N=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$$

В результате магн. поток оказывается квантованным (без привлечения к.-л. постулата о квантовании) с квантом потока $2\pi/e$. Аналогичное свойство присуще вихрям магн. потока в сверхпроводниках 2-го рода (см. *Решётка вихрей Абрикосова*) (с заменой $e\to 2e$ в силу *Купера эффекта*), т. к. в статическом пределе абелева модель Хиггса сводится к *Гинзбурга — Ландау теории* сверхпроводимости [7].

Вихри с N квантами магн. потока описываются решениями вида (9) ур-ний (8), к-рые при $\chi=N\theta$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференц. ур-ний:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}f(\rho)\right]-\left[\left(\frac{N}{\rho}-eB\right)^2+\lambda(f^2-a_0^2)\right]f=0,$$
$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho B)\right]-\left(e^2B-\frac{eN}{\rho}\right)f^2=0. \qquad (10)$$

Из требования конечности энергии, приходящейся на единицу длины вихря, выводится асимптотич. поведение ф-ций $f(\rho)$ и $B(\rho)$ на пространственной бесконечности: $f(\rho)\to a-\mu\exp(-\rho/\xi)$; $B(\rho)\to(N/e\rho)+\eta\exp(-\rho/\delta)$, где μ, η — константы, $\xi\equiv 1/(a_0\sqrt{\lambda})$ — длина когерентности, задающая масштаб изменений скалярного поля, $\delta\equiv ea_0$ — глубина проникновения (характерный масштаб для магн. поля). Т. о., вне линии вихря $f(\rho)$ и $B(\rho)$ экспоненциально убывают с увеличением расстояния. Помимо точного (чисто калибровочного) решения $f(\rho)=a_0$, $B(\rho)=(N/e\rho)$, известны лишь численные решения ур-ний (10). По величине безразмерного параметра Гинзбурга — Ландау $k=\delta/\xi=\sqrt{\lambda}$ сверхпроводники можно разбить на два класса: условием $k<1/\sqrt{2}$ выделяются *сверхпроводники первого рода*; при $k>1/\sqrt{2}$ имеем *сверхпроводники второго рода*. Устойчивые вихри характерны лишь для сверхпроводников 2-го рода, т. к. при $k<1/\sqrt{2}$ между вихрями возникают силы притяжения, под действием к-рых они коллапсируют. Напротив, при $k>1/\sqrt{2}$ между вихрями возникают силы отталкивания, приводящие к образованию треугольных решёток с единичными (несущими один квант магн. потока) вихрями в узлах. Поскольку при $k>1/\sqrt{2}$ энергия (на единицу длины) N-вихревой конфигурации $\mathscr{E}_N>N\mathscr{E}_1$, $N>1$, где $\mathscr{E}_1$ — энергия (на единицу длины) единичного вихря, то такая конфигурация оказывается неустойчивой и распадается на N отдельных единичных вихрей, что и подтверждается экспериментом. (В сверхтекучих жидкостях, по аналогичным причинам, устойчивыми и наблюдаемыми являются лишь вихри с единичным топологическим числом.) В случае $k=1/\sqrt{2}$ ур-ния (10) редуцируются к системе 1-го порядка:

$$\frac{df}{d\rho}=\left(\frac{N}{\rho}-eB\right)f, \qquad (11)$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho B)=-\frac{e}{2}(f^2-a_0^2).$$

Из (11) для энергии N-вихря, т. е. вихря, несущего N квантов магн. потока, выводится следующее выражение через энергию единичного вихря: $\mathscr{E}_N=N\mathscr{E}_1$, что свидетельствует об отсутствии взаимодействия между вихрями при $k=1/\sqrt{2}$.

Вихри Белавина — Полякова (А. А. Белавин, А. М. Поляков, 1975) — Т. с., обнаруженные в т. н. нелинейной $O(3)$-модели $\boldsymbol{n}$-поля $\boldsymbol{n}(x,t)=\{n^a(x,t),\ a=1,2,3;\ x\in R^2\}$, где n^a — действительные скалярные поля, подчинённые условию

$$n_an^a=\sum_{a=1}^{3}n_a^2(x,t)=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1, \qquad (12)$$

т. е. со значениями на сфере S^2. Динамика модели задаётся лагранжианом

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{n}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{n},\quad \mu=0,1,2, \qquad (13)$$

и ур-нием связи (12). Ур-ния Эйлера — Лагранжа находятся как условие экстремума действия для (13), где связь (12) учтена введением множителя Лагранжа, в итоге для статических полей имеем

$$\nabla^2\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{n}\cdot\nabla^2\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}=0.$$

Состояния с нулевой статической энергией $\mathscr{E}=0$ («классич. вакуумы»), где

$$\mathscr{E}=\frac{1}{2}\int d^2x\,\partial_i\boldsymbol{n}\cdot\partial_i\boldsymbol{n},\quad i=1,2, \qquad (14)$$

получаются из условия $\partial_i\boldsymbol{n}=0$, т. е. для всех $x\in R^2$ поле $\boldsymbol{n}(x)=\boldsymbol{n}_0$, где $\boldsymbol{n}_0$ — нек-рый фиксированный единичный вектор с произвольной ориентацией. Иными словами, модель содержит вырожденное непрерывное семейство «классич. вакуумов», переводимых друг в друга преобразованиями (вращениями) из группы $O(3)$, т. е. пространство вырождения $D=S^2$. Солитонные решения с ненулевой, но конечной энергией (14) — Т. с. — должны удовлетворять граничным условиям

$$\boldsymbol{n}(x)\to\boldsymbol{n}_0\ \text{при}\ r=|x|\to\infty,$$

в силу к-рых пространство R^2 пополняется бесконечно удалёнными точками и эффективно компактифицируется $R^2\cup\{\infty\}\simeq S^2$, т. е. Т. с. следует искать среди отображений $\boldsymbol{n}(x)$: $S^2\to S^2$. Такие отображения классифицируются группой $\pi_2(S^2)=\mathbb{Z}$ с определённым значением топологич. заряда

$$Q=\frac{1}{8\pi}\int d^2x\,\varepsilon_{ik}\boldsymbol{n}\cdot[\partial_i\boldsymbol{n}\,\partial_k\boldsymbol{n}],\quad i,k=1,2, \qquad (15)$$

где скалярное и векторное произведения относятся к векторам $\boldsymbol{n}$, ε_{ik} — *Леви-Чивиты символ*. Из тождества

$$\int d^2x\,\{(\partial_i\boldsymbol{n}\pm\varepsilon_{ik}[\boldsymbol{n}\partial_k\boldsymbol{n}])\cdot(\partial_i\boldsymbol{n}\pm\varepsilon_{ij}[\boldsymbol{n}\partial_j\boldsymbol{n}])\}\geqslant 0$$

с учётом (14), (15) находится оценка для энергии Т. с.: