СФЕРИ́ЧЕСКАЯ АБЕРРА́ЦИЯ — одна из геом. аберраций оптических систем, зависящая от положения точки пересечения луча с плоскостью входного зрачка. С. а. наблюдается даже для точки-объекта, находящейся на гл. оптич. оси системы. С. а. особенно велики в светосильных системах (с большим относительным отверстием), где приходится учитывать и аберрации высших порядков. Подробнее см. *Аберрации оптических систем.*

СФЕРИ́ЧЕСКАЯ ВОЛНА́ — волна, радиально расходящаяся от нек-рой точки (источника) или сходящаяся к ней (к стоку) и имеющая сферич. волновые фронты (поверхности равных фаз). Простейшим примером является сферически симметричная скалярная волна вида

$$u=f(r\mp ct)/r, \tag{1}$$

расходящаяся от центр. точки $r=0$ (знак «−») или сходящаяся к ней (знак «+») со скоростью c. Такая волна удовлетворяет *волновому уравнению* и описывает многие физ. процессы в линейных средах без дисперсии и без потерь. Суперпозиция сходящейся и расходящейся волн (в частности, стоячая С. в.) также является решением волнового ур-ния.

Ф-ция f в общем случае произвольна; важный частный случай — гармоническая С. в.: $f=A\exp i(\omega t\mp kr)$; в такой волне A/r — амплитуда, а $\omega t\mp kr=\Phi$ — фаза (ω — круговая частота, k — волновое число).

Если величина $u(r, t)$ описывает физ. поле (напр., возмущение давления в звуковой волне, скалярный потенциал в эл.-магн. волне и др.), то плотность потока энергии поля, уносимой от источника или приносимой к нему, пропорц. $|u(r, t)|^2$, и, следовательно, общий поток энергии через сферу любого радиуса r, пропорц. $4\pi r^2|u|^2$, сохраняется неизменным. Это является следствием закона сохранения энергии.

При наличии поглощения в среде энергия С. в. убывает в направлении её распространения. Для гармонич. С. в. поглощение может быть учтено заменой k на $k'\mp k''$, где k'' — мнимая часть волнового числа. Это означает, что амплитуда волны затухает по экспоненте:

$$u=\frac{Ae^{\mp k''r}}{r}\,e^{i(\omega t\mp k'r)}. \tag{2}$$

Существуют и несимметричные С. в., амплитуды к-рых зависят от полярной θ и азимутальной φ угл. координат, но фазовые фронты по-прежнему остаются сферическими:

$$u(r, \theta, \varphi, t)=U(r, t)\cdot D(\theta, \varphi), \tag{3}$$

где $U(r, t)$ отвечает симметричной С. в., напр. в форме (1) или (2), а $D(\theta, \varphi)$ описывает угл. зависимость поля (эту ф-цию можно представить в виде суперпозиции т. н. сферич. гармоник). В однородных изотропных средах волновое поле на больших расстояниях от центра почти всегда имеет вид (3). Подбором D можно концентрировать поле около заданных направлений, поэтому ф-ция $D(\theta, \varphi)$ наз. диаграммой направленности излучения источника (см. *Антенна*).

Лит. см. при ст. *Волны.* *М. А. Миллер, Л. А. Островский.*

СФЕРИ́ЧЕСКИЕ ФУ́НКЦИИ (сферические гармоники) — спец. функции, возникающие, напр., при отыскании ограниченных решений ур-ния Лапласа $\Delta u=0$ в сферич. координатах (r, θ, φ) методом разделения переменных. Введены в кон. 18 в. А. Лежандром и П. Лапласом. Полагая $u=u(r, \theta, \varphi)=R(r)\,Y(\theta, \varphi)$, после разделения переменных для $Y(\theta, \varphi)$ получаем ур-ние

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0, \tag{*}$$

$$\lambda=l(l+1),\ l=0,\ 1,\ \ldots,$$

частные решения к-рого — С. ф. — имеют вид

$$Y_{lm}(\theta, \varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{im\varphi}\,\Theta_{lm}(\cos\theta),\quad -l\leqslant m\leqslant l,\ m=0,\ \pm1,\ \ldots,$$

$$\Theta_{l,-m}(x)=(-1)^m\,\Theta_{lm}(x),\quad Y^*_{lm}(\theta, \varphi)=(-1)^m\,Y_{l,-m}(\theta, \varphi),$$

звёздочка означает комплексное сопряжение. Ф-ция $\Theta_{lm}(x)$ $(x=\cos\theta)$ может быть выражена через полиномы Якоби $P_l^{(\alpha,\beta)}(x)$, присоединённые ф-ции Лежандра $P_l^m(x)$ и полиномы Лежандра $P_l(x)$ (см. *Ортогональные полиномы*):

$$\Theta_{lm}(x)=C_{lm}(1-x^2)^{m/2}P^{(m,m)}_{l-m}(x),\quad C_{lm}=\frac{1}{2^m l!}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2l+1}{2}(l-m)!\,(l+m)!},\quad P^{(m,m)}_{l-m}(x)=\frac{2^m l!}{(l+m)!}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x),$$

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$$

[в нек-рых работах по квантовой механике в коэф. C_{lm} вводят дополнит. множитель $(-1)^m i^l$].

Общий вид решения ур-ния (*)

$$Y(\theta, \varphi)=Y_l(\theta, \varphi)=\sum_{m=-l}^{l}C_m\,Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

(C_m — постоянные).

С. ф. образуют полную

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y^*_{lm}(\theta', \varphi')\,Y_{lm}(\theta, \varphi)=\delta(\varphi-\varphi')\,\delta(\cos\theta-\cos\theta'),$$

ортонормированную

$$\int Y_{lm}(\theta, \varphi)\,Y^*_{l'm'}(\theta, \varphi)\,d\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'},\quad d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

систему на сфере единичного радиуса (δ — *дельта-функция*, $\delta_{nn'}$ — *Кронекера символ*). Эта система играет ту же роль в разложении ф-ций на сфере, что и тригонометрич. ф-ции на окружности. Для ф-ций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ построены конечно-разностные ортогональные аналоги на дискретном множестве точек сферы.

Рекуррентное соотношение и ф-лы дифференцирования для С. ф. имеют вид

$$\cos\theta\,Y_{lm}(\theta, \varphi)=\sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{4(l+1)^2-1}}\,Y_{l+1,m}(\theta, \varphi)+$$

$$+\sqrt{\frac{l^2-m^2}{4l^2-1}}\,Y_{l-1,m}(\theta, \varphi),$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{lm}(\theta, \varphi)=im\,Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$e^{\pm i\varphi}\left(\mp\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}+m\,\mathrm{ctg}\,\theta\,Y_{lm}\right)=\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\,Y_{l,m\pm1}$$

[при $m=\pm(l+1)$ следует полагать $Y_{lm}(\theta, \varphi)=0$].

Теорема сложения для С. ф. выражает полином Лежандра $P_l(\cos\omega)$ [ω — угол между векторами $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, направления к-рых характеризуются углами θ_1, φ_1 и θ_2, φ_2:

$$\cos\omega=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)]$$

через произведения С. ф.:

$$P_l(\cos\omega)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1)\,Y^*_{lm}(\theta_2, \varphi_2).$$

С помощью этой теоремы можно записать разложение потенциала (в точке $\boldsymbol{r}_1$) единичного заряда (расположенного в точке $\boldsymbol{r}_2$) в виде

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\omega)=$$

$$=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1)\,Y^*_{lm}(\theta_2, \varphi_2)\right],$$

$$r_<=\min(r_1, r_2),\ r_>=\max(r_1, r_2).$$