Отметим, что в случае полей гравитона и гравитино вне массовой поверхности (не подчиняющихся ур-ниям движения) преобразования (3) не образуют группу. Коммутатор двух таких преобразований в применении к гравитино даёт не только локализованные преобразования группы Пуанкаре, группы Лоренца и суперсимметрии, но также и лишние члены, пропорциональные ур-ниям движения для гравитино и соответственно обращающиеся в ноль при соблюдении этих ур-ний. Это означает, что вид преобразований (3) будет модифицироваться при включении взаимодействий с материальными или *калибровочными полями* и будет зависеть от этих взаимодействий.

Вспомогательные поля. Чтобы добиться замыкания алгебры локальных суперсимметрий и чтобы её преобразования имели универсальный вид, не зависящий от конкретной модели, следует ввести т. н. вспомогательные поля [5, 10]. Такие поля на массовой поверхности выражаются с помощью ур-ний движения через физ. поля или равны нулю. Необходимость во вспомогат. полях вне массовой поверхности диктуется также сопоставлением чисел фермионных и бозонных степеней свободы. Из суперсимметрии следует, что эти числа должны совпадать. На массовой поверхности имеются две бозонные ($\lambda=\pm 2$ у гравитона) и две фермионные ($\lambda=\pm 3/2$ у гравитино) степени свободы. Вне массовой поверхности тетрада e_μ^a имеет 6 степеней свободы. Действительно, её $4\times 4=16$ компонент подвержены преобразованиям общекоординатной группы (2), устраняющей 4 степени свободы, и локальной группы Лоренца, устраняющей 6 степеней свободы. В то же время из $4\times 4=16$ компонент $\psi_\mu^\alpha(x)$ локальная суперсимметрия [4 ф-ции $\varepsilon_\alpha(x)$] оставляет эффективными $16-4=12$ степеней свободы. Т. о., для последоват. описания вне массовой поверхности следует добавить, по крайней мере, бозонные поля с 6 степенями свободы. Мин. набор вспомогат. полей состоит из 4-векторного поля $A_\mu(x)$, скалярного поля $S(x)$ и псевдоскалярного поля $P(x)$. При этом в лагранжиан (1) необходимо добавить член

$$-\frac{1}{3}\,e\left[S^2(x)+P^2(x)-A_\mu(x)A^\mu(x)\right].$$

Из его вида следует, что на массовой поверхности в отсутствие материальных полей вспомогат. поля обращаются в нуль. Преобразование локальной суперсимметрии для тетрады (3а) не модифицируется, а для поля гравитино (3б) приобретает дополнит. члены со вспомогат. полями:

$$\delta\psi_\mu(x)=\frac{1}{\varkappa}\left(D_\mu+i\,\frac{\varkappa}{2}\,A_\mu\gamma_5\right)\varepsilon(x)+$$

$$+\frac{1}{6}\,\gamma_\mu\left(S(x)-i\gamma_5P(x)-iA_\nu(x)\gamma^\nu\gamma_5\right)\varepsilon(x).$$

Сами вспомогат. поля преобразуются через величины, исчезающие на ур-ниях движения, напр.

$$\delta S(x)=-\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\bar{\varepsilon}(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\,\gamma_\nu D_\lambda\psi_\rho(x);$$

правая часть представляет собой ур-ние движения для гравитино, следующее из (1). В результате получаются преобразования суперсимметрии (см. [5]), к-рые уже образуют группу и сохраняют свой вид при включении взаимодействий с материальными полями. В случае С. без взаимодействия с материальными полями эти преобразования сводятся на массовой поверхности к (3).

Суперпространство. Преобразования локальной суперсимметрии (3) и группа общекоординатных преобразований пространства-времени (2) должны объединяться в супергруппу общекоординатных преобразований *суперпространства* и в этих рамках допускают наиб. адекватную и красивую интерпретацию. Для простой суперсимметрии известны вещественное суперпространство

$$\mathbb{R}^{4|4}=\{x^\mu,\,\theta^\alpha,\,\bar{\theta}^{\dot\alpha}\},$$

содержащие наряду с векторной координатой x^μ дополнит. спинорные координаты θ^α, $\bar{\theta}^{\dot\alpha}$ ($\alpha,\dot\alpha=1,2$), объединяемые в вещественный майорановский спинор $\theta=\begin{pmatrix}\theta^\alpha\\ \bar{\theta}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}$, и киральное суперпространство

$$\mathbb{C}^{4|2}=\{z_L\}\equiv\{x_L^\mu,\,\theta_L^\alpha\},$$

к-рое является комплексным и его спинорные координаты образуют двухкомпонентный (левый, L), вейлевский спинор (см. *Вейля уравнение*). В отсутствие гравитации вещественное суперпространство $\mathbb{R}^{4|4}$ есть гиперповерхность в комплексном суперпространстве $\mathbb{C}^{4|2}$, определяемая ур-ниями

$$x_L^\mu=x^\mu+i\theta\sigma^\mu\bar{\theta},\ \theta_L^\alpha=\theta^\alpha,\ (\theta_L^\alpha)=\bar{\theta}^{\dot\alpha}.$$

Здесь черта означает комплексное сопряжение, $\sigma^\mu=(1,\boldsymbol{\sigma})$, $\boldsymbol{\sigma}$ — *Паули матрицы*. Группой простой С. является группа общих преобразований координат кирального суперпространства $\mathbb{C}^{4|2}$ [11]

$$x_L'^\mu=x_L^\mu+\lambda^\mu(x_L,\theta_L),\ \theta_L'^\alpha=\theta_L^\alpha+\lambda^\alpha(x_L,\theta_L),\tag{4}$$

ограниченных условием, что их супердетерминат (березиниан) равен единице:

$$\mathrm{Ber}\,\frac{\partial(x_L',\theta_L')}{\partial(x_L,\theta_L)}=1,\tag{5}$$

т. е. условием сохранения суперобъёма $\mathbb{C}^{4|2}$. Инфинитезимально оно имеет вид

$$\frac{\partial\lambda^\mu}{\partial x_L^\mu}-\frac{\partial\lambda^\alpha}{\partial\theta^\alpha}=0.\tag{5'}$$

Общие преобразования координат x_L^μ даются первым членом разложения по θ_L суперпараметра $\lambda^\mu(x_L,\theta_L)$, локальная суперсимметрия — первым членом разложения суперпараметра $\lambda^\alpha(x_L,\theta_L)$; локальным преобразованиям Лоренца отвечает линейный по θ_L член этого разложения. Остальные члены разложений λ^μ и λ^α либо соответствуют локальной конформной суперсимметрии [7, 11] и обращаются в нуль в силу условия (5′), либо описывают чисто калибровочные степени свободы.

Гравитационное аксиальное суперполе определяется след. геом. образом [11]. В комплексном суперпространстве $\mathbb{C}^{4|2}$ вводится вещественная гиперповерхность $\mathbb{R}^{4|4}$,

$$\mathbb{R}^{4|4}=\{x^\mu=\mathrm{Re}\,x_L^\mu,\ \theta^\alpha=\theta_L^\alpha,\ \bar{\theta}^{\dot\alpha}=(\overline{\theta_R^\alpha})\},$$

а мнимая часть векторной координаты отождествляется с аксиальным гравитац. суперполем,

$$H^\mu(x,\theta,\bar{\theta})=\mathrm{Im}\,x_L^\mu.$$

Группа общих преобразований координат (4) индуцирует на нём калибровочные преобразования. Возможна частичная фиксация калибровки, при к-рой в $H^\mu(x,\theta,\bar{\theta})$ остаются только физ. и вспомогат. поля мин. набора, обсуждённого выше на языке компонентных полей:

$$H^\mu(x,\theta,\bar{\theta})=\theta\sigma^a\bar{\theta}\,e_a^\mu(x)+\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha\psi_\alpha^\mu(x)+\theta\theta\bar{\theta}^{\dot\alpha}\bar{\psi}_{\dot\alpha}^\mu(x)+$$

$$+\theta\theta\,\partial^\mu\frac{1}{\partial^2}\left(S(x)+iP(x)\right)+\bar{\theta}\bar{\theta}\,\partial^\mu\frac{1}{\partial^2}\left(S(x)-iP(x)\right)+$$

$$+\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}A^\mu(x).$$

После такой фиксации калибровки остаётся калибровочная свобода, соответствующая общим преобразованиям координат в x-пространстве, локальной суперсимметрии и локальной группе Лоренца.

Супертензоры. Для описания геометрии искривлённого суперпространства $\mathbb{R}^{4|4}$ нужны тензорные (т. е. не зависящие от выбора системы координат или калибровки) объекты. Ковариантные производные в суперпространстве определяются через т. н. суперреперы E_A^M (обобщения тетрад) и связности ω_A^{BC}, аналогично тому, как это делается в обычном пространстве: