зации, а топологич. энтропию системы, рассматриваемой лишь на этом предельном множестве, можно назвать топологич. энтропией реализации. Существуют алгоритмы определения этих величин, к-рые позволяют вычислить их для сигналов, генерируемых реальными процессами [7] (течение жидкости, энцефалограммы и пр.). Конечность этих величин свидетельствует о динамич. характере исследуемого процесса, а сами они характеризуют «степень стохастичности» системы.

Стохастичность гамильтоновых систем. Стохастич. свойства демонстрируют даже очень простые гамильтоновы системы, напр. маятник под действием внеш. периодич. силы:

$$\ddot{x}+\sin x=b\sin\theta,\ \dot{\theta}=\omega.$$

Фазовое пространство этой системы трёхмерно и очевидно, что нач. фазовый объём сохраняется. Если в такой системе (в определ. области параметров) рассмотреть каплю «фазовой жидкости» в пространстве $\{(x,\ \dot{x},\ \theta)\}$, то можно обнаружить, что через нек-рое время она, сложным образом деформируясь, заполнит определ. область в фазовом пространстве, к-рая и будет соответствовать стохастич. движениям (рис. 1).

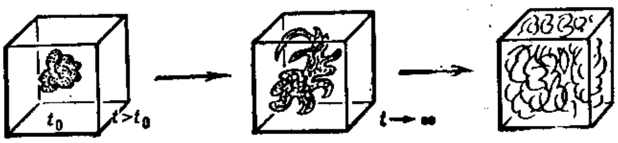

Рис. 1.

Однако наряду с этой областью перемешивания (или областью стохастичности) в фазовом пространстве (1) всегда будут существовать нач. условия, к-рым отвечает регулярное периодическое или квазипериодическое поведение. Особенно наглядно это видно на секущей плоскости $\theta=\theta_0\equiv\theta_0+2\pi n$ (на рис. 2 показаны следы фазовых траекторий — траектории отображения Пуанкаре). Регулярным движениям отвечают двумерные торы, на к-рых лежат траектории, соответствующие условно периодич. движениям (на рис. 2 — это замкнутые кривые). В области хаоса эти торы разрушены. Очевидно, в трёхмерном фазовом пространстве (и в четырёхмерном на трёхмерной поверхности пост. энергии) области хаотического и регулярного поведения разделены. Такие системы наз. системами с разделённым фазовым пространством [8].

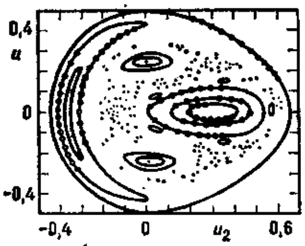

Рис. 2.

Если фазовое пространство имеет размерность больше четырёх, то геом. запретов, гарантирующих разделение хаотических и регулярных движений, уже не существует и области стохастич. поведения в разных частях фазового пространства могут соединяться друг с другом отрезками одной и той же траектории. Обычно это происходит вдоль *сепаратрис* (стохастич. диффузия, или диффузия Арнольда [8]).

Возникновение стохастичности в гамильтоновых системах типа (1) определяется значением амплитуды внеш. силы, что имеет простой физ. смысл. При достаточно больших амплитудах появляется большое число гармоник осн. частоты колебаний, на каждой из к-рых возможен нелинейный резонанс; при дальнейшем увеличении амплитуды области резонанса в фазовом пространстве, соответствующие этим движениям, перекрываются (т. н. перекрытие резонансов Чирикова). Обнаружение стохастич. поведения гамильтоновых систем, обладающего не только *эргодичностью*, но и более сильными статистич. свойствами (перемешиванием, спаданием автокорреляц. ф-ции и т. п.), позволяет построить динамич. модели, на основе к-рых могут быть получены осн. законы статистич. механики без предварит. гипотез. Это — модели типа бильярда Синая [9], газа Лоренца [10] и пр.

Стохастические автоколебания. В системах с диссипацией, напр. в системе

$$\ddot{x}+k\dot{x}+\sin x=b\sin\theta,\ \dot{\theta}=\omega, \qquad (2)$$

фазовый объём не сохраняется — он сжимается, поэтому можно было бы ожидать, что движение системы может лишь упроститься. Однако стохастич. поведение в таких системах сохраняется; лишь незначительно (в зависимости от величины k) уменьшается размерность стохастич. множества, к-рое в данном случае является странным аттрактором. Стохастич. *автоколебания* реализуются не только в простой модели (2) неавтономного осциллятора, но и практически в любой нелинейной колебательной диссипативной системе с периодич. силой, если её амплитуда не слишком мала, даже если потенциал осциллятора имеет лишь один минимум (в фазовом пространстве невозмущённой системы одно положение равновесия), как в системе, описываемой ур-нием

$$\ddot{x}+k\dot{x}+x+x^3=b\sin\theta,\ \dot{\theta}=\omega \qquad (3)$$

(нелинейный резонанс с учётом затухания). Существование стохастич. автоколебаний в системе

$$\ddot{x}-k\dot{x}(1-x^2)+x^3=b\sin\theta,\ \dot{\theta}=\omega, \qquad (4)$$

описывающей (с учётом нелинейной реактивности), в частности, синхронизацию колебаний, означает, кроме прочего, и то, что при переходе в области параметров через границу режима захватывания могут возникнуть не только биения, но и сложные колебания, ничем не отличимые от случайных. На рис. 3 приведены аттракторы систем, описываемых ур-ниями (3) и (4) при соответствующих значениях параметров.

Движения на странном аттракторе — установившиеся стохастич. автоколебания. Подобно периодич. автоколебаниям, матем. образом к-рых является предельный цикл, осн. характеристики установившихся движений (спектр колебаний, размерность, энтропия и др.) на странном аттракторе не зависят от нач. условий. Нач. условия сказываются лишь на характере переходного процесса. Несмотря на то, что странный аттрактор состоит из неустойчивых траекторий, т. е. движение рядом с каждой из них происходит лишь конечное время, однако переходы с одной неустойчивой траектории на другую происходят таким образом, что движение системы осуществляется вдоль траектории, тоже принадлежащей странному аттрактору [11].

В многомерных системах размерность странных аттракторов может быть много меньше размерности фазового пространства, что соответствует частичной синхронизации степеней свободы системы.

Пути возникновения стохастических колебаний [12, 13]. Последовательности *бифуркаций* (сценарии, пути), приводящие к возникновению С. к. при изменении параметров системы, могут быть бесконечно разнообразны, однако элементарных бифуркаций или их последовательностей, содержащихся в этих сценариях, не так много.

Рассмотрим вначале режимы «мягкого» возникновения стохастич. автоколебаний. Осн. бифуркации в этом случае представлены на рис. 4. Это — рождение тора из предельного цикла при потере им устойчивости, бифуркация удвоения периода, слияние устойчивого и седлового циклов и их исчезновение, сопровождающееся возникновением странного аттрактора, сложные деформации («гофрирование») тора и его разру-