В этом методе вероятность реализации вектора наблюдений x, $P(x|a) = \prod_n p(x_n|a)$, после подстановки в неё реализовавшихся значений x рассматривают как ф-цию параметров a и называют ф-цией правдоподобия: $L(a|x) = P(x|a)$. В качестве оценки в методе макс. правдоподобия для вектора параметров a берут то значение $\hat{a}$, к-рое соответствует макс. значению ф-ции правдоподобия. При нек-рых общих предположениях оценки в методе макс. правдоподобия состоятельны, асимптотически эффективны и асимптотически нормально распределены. При конечных N оценка в методе макс. правдоподобия имеет оптим. свойства только в том случае, когда существует достаточная статистика.

Метод наименьших квадратов (подробнее см. *Наименьших квадратов метод*). В этом методе в качестве оценки вектора параметров a берут то значение $\hat{a}$, к-рое соответствует минимуму квадратичной формы.

$$\Phi = \sum_{n,m} [x_n - \bar{x}_n(a)] D^{-1}_{nm} [x_m - \bar{x}_m(a)],$$

где D — матрица ошибок измерений x_n. При нек-рых общих предположениях оценка в методе наим. квадратов состоятельна и асимптотически нормально распределена, но не является асимптотически эффективной. Если $\bar{x}_n$ — линейные ф-ции параметров a, то в классе линейных несмещённых оценок оценки $\hat{a}_i$ в методе наим. квадратов имеют наим. дисперсии.

Метод моментов. Пусть m_l — выборочные моменты, $m_l = \sum_n x_n^l / N$, а $\mu_l(a)$ — моменты ф-ции плотности распределения, $\mu_l(a) = \int dx x^l p(x|a)$. В методе моментов выбирают в качестве оценки параметров a решение $\hat{a}(x)$ системы ур-ний $\mu_l(a) = m_l$. Оценки в методе моментов состоятельны, асимптотически несмещены, но не являются асимптотически эффективными.

χ^2-метод. Если объём выборки x велик и данные x_n сгруппированы в *гистограмму*, то для оценки параметров a используют χ^2-метод, являющийся частным случаем метода наим. квадратов. Пусть Y_l — число наблюдений, попавших в l-канал гистограммы, а $\bar{Y}_l(a)$ — их ожидаемое число:

$$\bar{Y}_l(a) = N \int_{x_l}^{x_{l+1}} dx p(x|a).$$

В качестве оценки параметров a берут значение $\hat{a}(Y)$, соответствующее минимуму квадратичной формы

$$\Phi = \sum_l [Y_l - \bar{Y}_l(a)]^2 / \bar{Y}_l(a),$$

либо модифицированный χ^2-метод

$$\Phi = \sum_l [Y_l - \bar{Y}_l(a)]^2 / Y_l.$$

Оценки в χ^2-методе и модифицированном χ^2-методе состоятельны, асимптотически нормально распределены и асимптотически эффективны. Своё название эти методы получили по той причине, что при больших Y_l (приближение нормального распределения) $\Phi(a = \hat{a})$ распределено по χ^2-распределению с числом степеней свободы $k = L - I - 1$, где L — число каналов гистограммы, I — число параметров.

Интервальное оценивание состоит в отыскании интервала $[a_1, a_2]$, к-рый с заданной вероятностью β содержит истинное значение параметра a. Др. словами, нужно найти такой интервал $[a_1, a_2]$ (как ф-цию вектора наблюдений x), к-рый «накроет» с вероятностью β истинное значение a при данном значении x. Это т. н. *доверительный интервал* с вероятностным содержанием β (или коэф. доверия β). Такое определение неоднозначно, его обычно доопределяют требованием минимальности длины среди всех интервалов с коэф. доверия β.

Пусть распределение $p(x|a)$ зависит от одного параметра a и $\hat{a}(x)$ — к.-л. точечная оценка a, ф-ция плотности вероятности к-рой равна $q(\hat{a}|a)$. Тогда центр. доверит. интервал определяется как решение ур-ний

$$\int_{-\infty}^{\hat{a}(x)} d\hat{a} q(\hat{a}|a_1) = \frac{1-\beta}{2} = \int_{\hat{a}(x)}^{\infty} d\hat{a} q(\hat{a}|a_2).$$

Такой доверит. интервал может и не быть минимальным. Однако, если точечная оценка $\hat{a}(x)$ асимптотически эффективна, то при больших N этот интервал будет близок к минимальному.

Более общий подход к получению доверит. интервалов заключается в поиске такой ф-ции от оценки и параметра, распределение к-рой не зависит от искомого параметра. Напр., пусть вектор оценок $\hat{a}$ распределён по многомерному *Гаусса распределению* со средним a и матрицей вторых моментов D. Тогда квадратичная форма $\Phi(\hat{a}, a) = (\hat{a} - a) D (\hat{a} - a)$ распределена по закону $\chi^2(I)$ (см. *Распределение*), к-рое не зависит от a. Задаваясь вероятностью β того, что $\Phi(\hat{a}, a) \leqslant k_\beta$, находим k_β и доверит. область для a: $\Phi(\hat{a}, a) = k_\beta$, имеющую вид гиперэллипсоида с центром в точке $\hat{a}$. Этот пример имеет практич. применение, т. к. асимптотически, при больших N, мн. методы оценивания дают нормально распределённые оценки параметров.

Непараметрическое оценивание. В этом случае не делают к.-л. предположений о плотности ф-ции распределения. В качестве точечной оценки часто используют гистограмму. В этом методе оценивания числовую ось, на к-рой определены x_n, делят на ряд областей r_j ($j = 1, 2, \ldots, k$), называемых каналами гистограммы. Тогда $\hat{P}_N(x)$ задают константами $\hat{p}_j$ в каждой области r_j, причём $\hat{p}_j = C(N) \sum_n g_j(x_n)$. Здесь $C(N)$ — коэф. нормировки, $g_j(x)$ — индикаторная ф-ция области r_j:

$$g_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in r_j, \\ 0, & x \notin r_j. \end{cases}$$

Более формально оценки ф-ции плотности вероятности записывают в виде

$$\hat{P}_N(x) = N^{-1} \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{N} g_j(x_n) g_j(x).$$

Гистограмма является простой в вычислит. плане, но смещённой и несостоятельной оценкой. Поэтому используют более сложные, но состоятельные оценки, напр. метод ближайших соседей (см. *Непараметрические методы* статистики). В качестве точечной оценки ф-ции распределения можно взять выборочную ф-цию распределения:

$$P_N(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ n/N, & x_n < x \leqslant x_{n+1}, \\ 1, & x > x_N, \end{cases}$$

где подразумевается, что $x_1, \ldots, x_N$ расположены в порядке их возрастания. Эта оценка оказывается несмещённой и состоятельной. Ф-ция распределения $P(x)$ допускает и интервальную оценку. Рассмотрим статистику $D_N = \max |P_N(x) - P(x)|$, для к-рой асимптотич. распределением является $\lim F(N^{1/2} D_N > z) =$