магн. моментами. Линеаризов. ур-ния (1) совместно с (4) суть ур-ния С. в. Подставляя в них

$$m_l = m_{l0} \exp\left[-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})\right], \qquad (5)$$

получаем алгебраич. систему ур-ний относительно амплитуд С. в. m_{i0}. Равенство нулю детерминанта этой системы приводит к ур-нию N-го порядка относительно ω^2. Его решения определяют законы дисперсии С. в. при $ak \ll 1$.

Обычно в магнитоупорядоченных средах гл. роль во взаимодействии между магн. моментами атомов играет *обменное взаимодействие*, изотропное относительно однородного поворота магн. моментов атомов. Магн. порядок появляется в результате *спонтанного нарушения симметрии* обменного взаимодействия. Энергия обменного взаимодействия соседних атомов $|J|$ порядка темп-ры Кюри T_C (темп-ры T_N); знак J выбирается так, что при $J > 0$ обменное взаимодействие благоприятствовало бы ферромагн. упорядочению, а при $J < 0$ — антиферромагнитному.

Ветви спиновых волн. Число ветвей С. в. равно числу магн. подрешёток. Это обусловлено прецессионным характером движения магн. моментов подрешёток. Ветви С. в. принято делить на акустические и оптические аналогично *колебаниям кристаллической решётки*. Если пренебречь малыми (по сравнению с обменными), т. н. релятивистскими, взаимодействиями (зеемановским с постоянным магн. полем, спин-орбитальным — источником энергии *магнитной анизотропии*, магнитодипольным и др.), то акустич. типы С. в. представляют собой *голдстоуновские моды*, т. е. в их энергетич. спектре при $\mathbf{k} = 0$ щель отсутствует. Частоты акустич. С. в. стремятся к 0 с ростом длины волны $\lambda = 2\pi/k$. Их число и характер закона дисперсии $\omega(\mathbf{k})$ при $\mathbf{k} \to 0$ зависят от структуры осн. состояния магнетика, причём при любом кол-ве подрешёток число акустич. мод $\leqslant 3$. У одноподрешёточного ферромагнетика одна акустич. мода с $\omega \backsim |J|(ak)^2/\hbar$ при $ak \ll 1$; у двухподрешёточного антиферромагнетика 2 вырожденные акустич. моды с $\omega \backsim |J|\ (ak)/\hbar$. В ферромагнетике магнон напоминает нерелятивистскую частицу с энергией $\mathscr{E} = p^2/2m$, в *антиферромагнетике* — акустич. фонон с $\mathscr{E} = up$ (m, u — масса частицы и скорость звука). Примеры магнетиков, имеющих 3 акустич. ветви в спектре С. в.,— многоподрешёточные антиферромагнетики с неколлинеарным расположением магн. моментов в упорядоченном состоянии при $H = 0$ (UO_2, $CsNiCl_3$, $CsMnBr_3$ и др.). Учёт релятивистских взаимодействий приводит к возникновению энергетич. щелей в спектре акустич. ветвей С. в. $\hbar\omega_{i0} \neq 0$ (ω_{i0} — частоты однородной прецессии). Когда в спектре С. в. есть оптич. моды, их частоты однородной прецессии $\omega_{i0} \sim |J|/\hbar$.

Дисперсия. С. в. являются причиной зависимости тензора *магнитной восприимчивости* χ от волнового вектора $\mathbf{k}$: $\chi_{ik} = \chi_{ik}(\mathbf{k})$ (см. *Дисперсия пространственная*). Частотная дисперсия (зависимость χ от ω) является следствием прецессии магн. моментов подрешёток. Тензор χ_{ik} определяется в результате решения ур-ния (1), а *Максвелла уравнения* дают возможность найти связь между ω и $\mathbf{k}$, т. е. законы дисперсии С. в., учитывающие конечность скорости света. При $k \gg \omega/c$ они отличаются от законов дисперсии, полученных на основе ур-ний магнитостатики (4), малыми поправками, к-рые иногда существенны, напр. при описании взаимодействия С. в. с электронами проводимости в металлах и полупроводниках.

В магнетиках со сложной структурой (антиферромагнетиках и ферритах) изменение темп-ры и внеш. условий (магн. поля, давления) может привести к переориентации равновесных магн. моментов. При этом произойдёт т. н. *ориентационный фазовый переход*, к-рый изменит спектр С. в. Если это фазовый переход 2-го рода, то он сопровождается обращением в нуль частоты одной из ветвей С. в.

С ростом k ($ak \sim 1$) проявляется дискретная (кристаллич.) структура магнетиков. Для получения законов дисперсии, справедливых при произвольном значении ak, обычно используют приближённые представления спиновых операторов $\hat{s}_l$ через операторы рождения $\hat{a}_l^{+}$ и уничтожения $\hat{a}_l$ магнонов, подчиняющиеся бозевским правилам коммутации (преобразование Хольштейна — Примакова):

$$\hat{s}_l^{+} \approx (2s_l)^{1/2}\hat{a}_l^{+},\ s_l^{\pm} = \hat{s}_l^{x} \pm i\hat{s}_l^{y}; \quad \hat{s}_l \approx (2s_l)^{1/2}\hat{a}_l; \qquad (6)$$

$$\hat{s}_z^{z} = s_l - a_l^{+} a_l;$$

$$a_l a_m^{+} - a_m^{+} a_l = \delta_{lm}.$$

Здесь индекс l нумерует атомы, координатные оси выбраны так, чтобы ось z для каждого атома была направлена вдоль равновесного положения спина. Из правил коммутации для a_l^{+}, a_l следует, что $n_l = a_l^{+} a_l$ — любое целое число от 0 до ∞, хотя по физич. смыслу $n_l \leqslant 2s$. Вблизи основного состояния ср. значение n_l значительно меньше s_l, и приближённые ф-лы (6) пригодны для вычисления спектра тем точнее, чем больше s_l (в квантовомеханич. пределе $s_l \gg 1$). Однако и при $s_l \sim 1$ частоты С. в., как правило, лишь небольшими поправками отличаются от значений, найденных с помощью (6).

Магнонный спектр. Теоретич. рассмотрение позволяет вычислить энергию магнонов при любом $\mathbf{k}$. Это приводит к периодич. зависимости

$$\omega_i(\mathbf{k} + 2\pi\boldsymbol{b}) = \omega_i(\mathbf{k}), \qquad (7)$$

где $\boldsymbol{b}$ — произвольный вектор *обратной решётки*. Так, гамильтониан одноподрешёточного магнетика

$$\hat{\mathscr{H}} = -\frac{1}{2}\sum_{l \neq m} J(\boldsymbol{R}_{lm})\hat{s}_l\hat{s}_m - \mu\sum_l \hat{s}_l\boldsymbol{H}. \qquad (8)$$

Здесь $J(\boldsymbol{R}_{lm})$ — обменный интеграл между l-м и m-м атомами, $\boldsymbol{R}_{lm}$ — вектор, соединяющий эти атомы, μ — магн. момент атома. С помощью (7) и (8) (пренебрегая взаимодействием между магнонами) можно получить спектр магнонов:

$$\hbar\omega(\mathbf{k}) = 2s\sum_{\boldsymbol{R}} J(\boldsymbol{R})\sin^2\left(\frac{1}{2}\mathbf{k}\boldsymbol{R}\right) + \mu H. \qquad (9)$$

Ширина магнонной энергетич. зоны $\Delta\hbar\omega = \hbar[\omega(k_{\text{макс}}) - \omega(0)]$, где $k_{\text{макс}} = (\pi/2a)\boldsymbol{b}$, равна:

$$\Delta\hbar\omega = 2s\sum_{\boldsymbol{R}} J(\boldsymbol{R}) \simeq 2sJ$$

(J — обменный интеграл для ближайших соседей). Соотношение $\Delta\hbar\omega \backsim J$ — общее свойство магнонных зон.

Магнитный момент магнона. Зависимость энергии магнона от магн. поля $\boldsymbol{H}$ означает, что магнон обладает магн. моментом:

$$\mu_i = -\partial\hbar\omega_i/\partial\boldsymbol{H}. \qquad (10)$$

В простейшем случае чисто обменного одноподрешёточного ферромагнетика магн. момент магнона равен магн. моменту атома и направлен против равновесной намагниченности. Увеличение числа магнонов приводит к уменьшению величины спонтанной намагниченности магнетика. В многоподрешёточных магнетиках рост числа магнонов уменьшает намагниченность подрешёток.

В магн. металлах (Fe, Co, Ni и др.), где за магн. свойства ответственны d-электроны, в формировании