L_λ пространства L. Размерность L_λ наз. кратностью С. з. Если пространство L конечномерно, то С. з. совпадают с корнями характеристич. многочлена, $\det\|A-\lambda I\|$, где A — *матрица* линейного преобразования A в нек-ром *базисе*, I — единичная матрица. Если оператор A самосопряжён (*эрмитов оператор*), то все его С. з. вещественны. В квантовой механике вещественные С. з. самосопряжённого оператора отвечают значениям *наблюдаемых* (измеримых) величин. В частности, у каждой конечномерной эрмитовой $n\times n$-матрицы A найдутся (с учётом кратностей) ровно n С. з.

В бесконечномерном случае можно сформулировать аналог этого утверждения для самосопряжённых компактных операторов. Оператор A, действующий, напр., в пространстве l^2 бесконечномерных векторов $f=(a_1,a_2,\ldots)$ с конечной нормой

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2<\infty$$

и соответствующим *скалярным произведением*, наз. компактным, если он переводит любую ограниченную последовательность векторов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (т. е. такую, что для всех n выполнено неравенство $\|x_n\|<M$) в последовательность $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$, из к-рой всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Отсюда, в частности, следует, что если выбрать последовательность $\{x_n\}$ ортонормированной: $(x_n,x_m)=1$ при $n=m$ и 0 при $n\neq m$ [примером такой последовательности служит $x_n=(0,\ldots,0,1,0,\ldots)$], то последовательность $\{Ax_n\}$ будет сходиться к нулю. Для таких операторов, действующих в пространстве l^2 или в функциональных пространствах, справедлива теорема Рисса — Шаудера, утверждающая, что система собств. ф-ций (собств. векторов) такого оператора образует базис (полную систему из ортонормированных ф-ций) в соответствующем пространстве, а его С. з. λ_n сходятся к нулю при $n\to\infty$, причём каждое С. з. является корнем конечной кратности. К классу компактных операторов относятся все ограниченные *интегральные операторы* с интегрируемым ядром, к-рые часто встречаются в физике, напр. в задачах с *потенциалом*.

Класс компактных операторов оказывается слишком узким, чтобы описать все физически интересные случаи. Он не описывает унитарные операторы (т. е. операторы, сохраняющие норму; все С. з. таких операторов представляются в виде $e^{i\varphi}$, $\varphi\in\mathbb{R}$), а также *дифференциальные операторы*, к-рые, как правило, не ограничены. Обобщением понятия С. з. для таких операторов служит понятие спектра $\sigma(A)$ оператора A. Число λ принадлежит *спектру оператора*, если резольвента оператора A, $R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$, будет сингулярным оператором. Все С. з. A будут принадлежать $\sigma(A)$ [они будут изолированными (дискретными) точками $\sigma(A)$]. Однако помимо этих точек $\sigma(A)$ обычно содержит непрерывную часть, состоящую из таких точек λ, для к-рых оператор $R(\lambda)$ определён, но не ограничен. В обычном смысле таким λ не соответствует никакая собств. ф-ция, тем не менее аналог разложения по базису собств. ф-ций задаётся спектральным разложением.

Лит. см. при ст. *Собственные функции.* *Л. О. Чехов.*

СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ — то же, что *нормальные волны*.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ — колебания, происходящие в колебательной системе в отсутствие внеш. воздействия; то же, что *свободные колебания*.

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ оператора, действующего в функциональном пространстве,— ненулевые ф-ции f_λ, переводящиеся оператором A в пропорциональные им:

$$Af_\lambda=\lambda f_\lambda.$$

Комплексное либо вещественное число λ наз. *собственным значением* оператора A. В *гильбертовом пространстве* $L^2(\Omega,d\mu)$ ф-ций на множестве Ω, интегрируемых с квадратом по мере $d\mu$, в к-ром задано скалярное произведение ф-ций

$$\langle f,\psi\rangle=\int_\Omega f^*(x)\psi(x)d\mu(x)$$

(звёздочка означает комплексное сопряжение) и вводится понятие сопряжённого оператора, особенно важную роль играют самосопряжённые *линейные операторы* (эрмитовы операторы, в дальнейшем линейность операторов подразумевается). Это такие операторы, для к-рых $\langle x,Ay\rangle=\langle Ax,y\rangle$ для всех x и y из $L^2(\Omega,d\mu)$ (и эти скалярные произведения имеют смысл); множества всех допустимых ф-ций x и y должны совпадать; все собств. значения таких операторов вещественны. В квантовой механике с каждой *наблюдаемой* ассоциируется самосопряжённый оператор, С. ф. к-рого задают состояние системы с определённым значением оператора наблюдаемой. Напр., для гармонич. осциллятора оператор энергии (*гамильтониан*)

$$H=-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}x^2,$$

С. ф. к-рого являются функции Эрмита, ортогональные на $]-\infty,+\infty[$. При этом k-й С. ф. $\psi_k(x)=(\sqrt{\pi}2^k k!)^{-1/2}(x-d/dx)^k\exp(-x^2/2)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ соответствует собств. значение $\lambda_k=k+1/2$.

С. ф. f_1 и f_2 самосопряжённого оператора A, отвечающие разл. собств. значениям λ_1 и λ_2, ортогональны, $\langle f_1,f_2\rangle=0$. Множество L_λ всех С. ф., отвечающих одному собств. значению λ, образует линейное подпространство, совпадающее с ядром оператора $A-\lambda I$ (I — единичный оператор), т. е. с множеством ф-ций, переводимых этим оператором в 0 (ядром оператора B наз. множество ф-ций f, для к-рых $Bf=0$).

В приложениях (вариац. исчисление, классич. граничные задачи матем. физики) важную роль играют самосопряжённые *интегральные операторы* K:

$$(Kf)(x)=\int_\Omega K(x,y)f(y)d\mu(y),$$

ф-ция $K(x,y)=K^*(y,x)$ наз. ядром интегрального оператора (не путать с понятием ядра оператора, определённым выше). Если оператор K ограничен, а его ядро — интегрируемая ф-ция, то K компактен и его С. ф. образуют *базис* в пространстве $L^2(\Omega,d\mu)$. Ядро $K(x,y)$ такого оператора можно разложить в (конечную либо бесконечную) сумму:

$$K(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\varphi^*_{n_\lambda}(x)\varphi_{n_\lambda}(y),\qquad(*)$$

где $\varphi_{n_\lambda}(x)$ — набор (всегда конечный при данном n) ортонормированных С. ф., отвечающих одному и тому же собств. значению λ_n, при этом $|\lambda_n|\to0$ при $n\to\infty$. Примером такого интегрального оператора может служить решение *Дирихле задачи*. Одним из критериев ограниченности является условие $K(x,y)\in L^2(\Omega\otimes\Omega,d\mu\otimes d\mu)$, т. е. ф-ция $K(x,y)$ интегрируема с квадратом по своим аргументам.

Класс самосопряжённых операторов, действующих на всём гильбертовом пространстве ф-ций $L^2(\Omega,d\mu)$, слишком узок, чтобы охватить все физически интересные величины. Не все даже ограниченные операторы имеют разложение (*). Напр., *унитарный оператор* сдвига $\varphi(x)\to\varphi(x+a)$ не имеет С. ф. в пространстве $L^2(]-\infty,+\infty[)$, то же справедливо и для неограниченных операторов, к к-рым относятся практически все *дифферен-*