где ξ — расстройка от точного резонанса, $h_{1,2}$ — инкременты каждой из мод, $\rho_{12}\ \rho_{21}$ — параметры, характеризующие конкуренцию мод, а $\sigma_{1,2}$ — их резонансное взаимодействие. Здесь также режиму С. к. отвечает устойчивое состояние равновесия, граница области устойчивости к-рого и определяет границу области взаимной синхронизации [3]. Взаимная синхронизация наблюдается в системах с числом степеней свободы $\geqslant 2$, и во многих ситуациях после разрушения режима С. к. возможно возникновение стохастических автоколебаний (см. *Стохастические колебания*). Явление С. к. наблюдается не только в случае, когда частоты парциальных генераторов близки друг к другу, но и когда они близки к кратным друг друга (синхронизация на гармониках и субгармониках). Именно за счёт взаимной синхронизации мод оптич. резонатора удаётся реализовать режим генерации ультракоротких импульсов в лазерах [7].

В сильно нелинейном случае усреднённое описание, приводящее к ур-ниям типа (1) и (2), не адекватно задаче, и здесь используется качеств. теория динамических систем. В этой теории явление синхронизации периодич. колебаний двух автоколебат. систем можно описать следующим образом. Каждой из систем

$$\dot{x}=f(x),\quad x\in\mathbb{R}^m, \tag{3}$$

$$\dot{y}=g(y),\quad y\in\mathbb{R}^m \tag{4}$$

свойственны периодич. автоколебания, т. е. в её фазовом пространстве имеется устойчивый предельный цикл — L_1 и L_2 соответственно. Система

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f(x)+\gamma h(x,y),\\ \dot{y}&=g(y)+\gamma r(x,y)\end{aligned} \tag{5}$$

при $\gamma=0$ будет иметь притягивающий двумерный тор $\pi_0=L_1\times L_2$ (каждая система колеблется независимо от другой). При возрастании параметра связи γ движение в парциальных подсистемах системы (5) перестаёт быть независимым, что отвечает бифуркациям на торе π_γ [остающемся аттрактором для системы (5)]. В частности, явлению синхронизации отвечает рождение устойчивого предельного цикла на этом торе.

Более подробную информацию о перестройках в системе при изменении параметра связи даёт т. н. дьявольская лестница — график зависимости числа вращения системы на торе π_γ от параметра связи. [Число вращения — это предел отношения фаз бывших независимыми при $\gamma=0$ колебаний парциальных генераторов: $\mu=\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)/\psi(t)$]. Зависимость числа вращения от величины параметра связи имеет вид непрерывно уменьшающихся ступеней (рис. 3). Точнее, ф-ция $\mu(\gamma)$ растёт на канторовом *множестве*. Каждое своё значение, равное отношению целых чисел p/q (синхронизация), число вращения принимает, вообще говоря, на нек-ром интервале, а числа p и q соответствуют номерам гармоник, на к-рых осуществляется взаимная синхронизация. Если следить за изменением не только параметра связи, но и др. параметра (напр., надкритичности в каждом из генераторов), то области синхронизации будут изображаться уже не на прямой, а на плоскости. Обычно эти области имеют вид «языков» [8] (т. н. языки Арнольда [9]) — рис. 4.

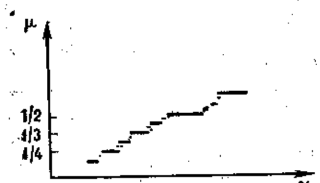


Рис. 3.

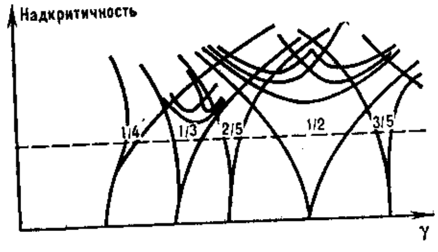
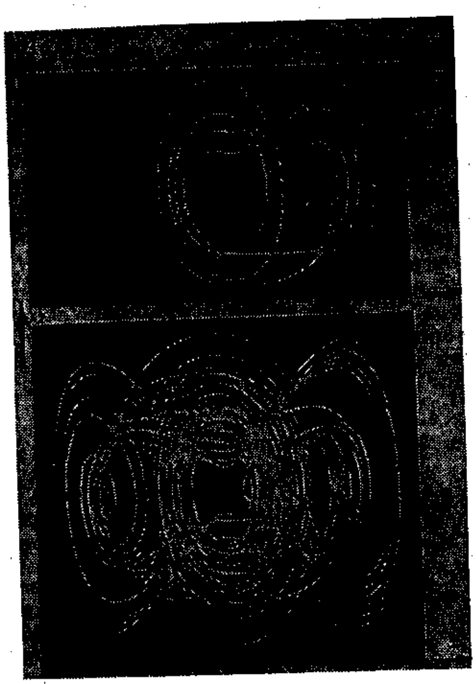


Рис. 4.

Взаимное согласование движений свойственно генераторам не только периодических, но и стохастических автоколебаний. Принципиальное отличие от случая периодич. колебаний здесь в том, что движения взаимодействующих неидентичных подсистем согласуются лишь в среднем по времени. При этом могут быть одинаковыми топология проекций *странных аттракторов* на парциальные подпространства, их размерности, спектры мощности парциальных колебаний. В то же время сами реализации локально по времени могут не совпадать. На рис. 5 представлены странные аттракторы парциальных подсистем в автономном режиме



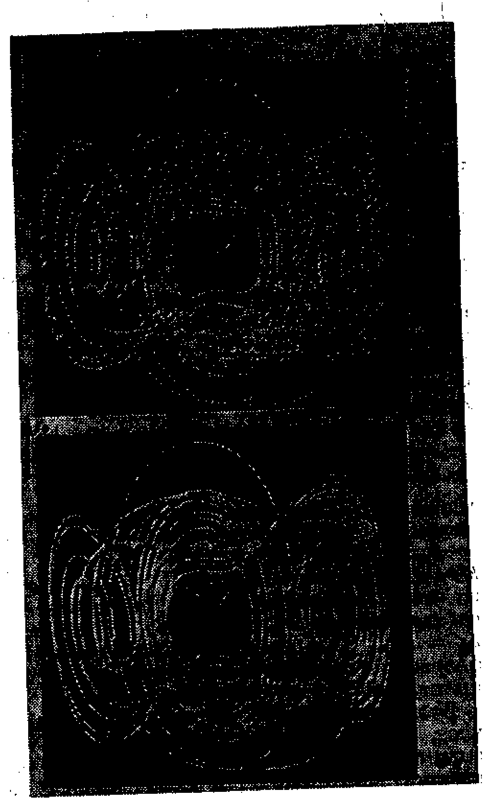


Рис. 5.