Конформными наз. такие преобразования риманова пространства, при к-рых метрика подвергается растяжению, $g_{ij}(x) \to \lambda(x) g_{ij}(x)$. Конформные преобразования n-мерного риманова пространства при $n \geqslant 3$ образуют группу Ли, размерность к-рой не превосходит $(n+1)(n+2)/2$. Инвариантностью относительно конформных преобразований обычно обладают теории безмассовых частиц.

Геодезическая линия — экстремаль функционала длины, рассматриваемого на кривых с закреплёнными концами. Ур-ния геодезических имеют вид

$$\ddot{x}^l + \Gamma^l_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0.$$

Геодезические могут быть получены также как экстремаль функционала действия:

$$S = \int_a^b |\dot{x}|^2 dt = \int_a^b g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j dt.$$

Близкие точки x, y риманова пространства всегда можно соединить локально единственной геодезической, длина к-рой и будет равна расстоянию $\rho(x,y)$. Риманово пространство наз. **геодезически полным**, если любая геодезическая $x^i(t)$ неограниченно продолжается по t. В полном римановом пространстве любые две точки можно соединить геодезической (вообще говоря, не единственной). Изучение глобальных свойств геодезических риманова пространства составляет важный раздел *вариационного исчисления* в целом. Поскольку многие ур-ния классич. механики могут быть записаны в виде ур-ний геодезических, методы теории геодезических применимы для получения качеств. информации о характере механич. движения. В общей теории относительности, где массивные частицы движутся по времениподобным (а безмассовые — по изотропным) геодезическим *индефинитной метрики*, в основном изучаются именно такие геодезические. Нек-рые их глобальные свойства допускают физ. интерпретацию. Так, наличие замкнутых геодезических означает нарушение причинности. Геодезич. неполнота трактуется как наиб. универсальный способ определения сингулярности пространства-времени.

Важная задача Р. г.— установление зависимости между геометрией риманова пространства и его *топологией*. Простейшим примером такой зависимости является ф-ла Гаусса — Бонне, справедливая для замкнутой двумерной поверхности:

$$\frac{1}{4\pi}\oint K\,d\sigma = 1 - g,$$

где K — гауссова кривизна поверхности, $d\sigma$ — элемент площади, g — топологич. характеристика поверхности, равная числу ручек (напр., для сферы $g = 0$, для тора $g = 1$). Для многомерных римановых пространств строятся более сложные топологич. характеристики (**характеристич. классы**), вычисляемые в виде интегралов от инвариантов тензора кривизны. Известны также теоремы, выводящие топологич. ограничения на риманово пространство из соотношений типа неравенств для его кривизны. Простейшим примером является такое утверждение: полное односвязное (т. е. любой замкнутый путь стягивается в точку) риманово пространство отрицат. кривизны топологически евклидово.

Комплексный аналог Р. г.— теория пространств с эрмитовой метрикой, записываемой в комплексных координатах $z^1,\dots,z^n$ в виде $ds^2 = g_{ij}dz^i d\bar{z}^j$ (черта означает комплексное сопряжение), причём $g_{ji} = \overline{g_{ij}}$. В частности, двумерная метрика может быть записана в комплексном виде $ds^2 = g(z,\bar{z})dz d\bar{z}$, если ввести изотермич. координаты x^1, x^2, такие, что $g_{ij} = g\delta_{ij}$, и положить $z = x^1 + ix^2$, $\bar{z} = x^1 - ix^2$ (здесь i — комплексная единица). Конформные преобразования сводятся тогда к комплексно-аналитич. заменам, $\bar{z} \to w(z)$, $dw/d\bar{z} = 0$, и сопряжению $z \to \bar{z}$.

Большинство методов Р. г. переносятся на псевдоримановы пространства, в к-рых задана индефинитная метрика, и поэтому являются осн. аппаратом *общей теории относительности*.

Лит.: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988; Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, 2 изд., М., 1986; их же, Современная геометрия. Методы теории гомологий, М., 1984. *Б. А. Дубровин.*

РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, локально устроенная как область комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (комплексное аналитич. *многообразие*). Если X — нек-рая поверхность (многообразие), представимая в виде объединения открытых подмножеств $\{U_i\}$, каждое из к-рых эквивалентно нек-рой области Ω_i в $\mathbb{C}$, то говорят, что на X задана структура Р. п. Др. словами, существуют ф-ции f_i, непрерывно и взаимно однозначно отображающие Ω_i на U_i, причём для любой пары индексов i и j ф-ции перехода $f_j^{-1}\cdot f_i$ являются *аналитическими функциями*, взаимно однозначно отображающими $f_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ на $f_j^{-1}(U_i \cap U_j)$. Пара (U_i, f_i) наз. **картой**, а совокупность всех карт, покрывающих X, — **атласом**. Ниже приведены примеры Р. п.

1. Всякая область Ω в $\mathbb{C}$ является Р. п. При этом атлас можно выбрать состоящим из одной карты, положив $U = \Omega$ и f, равной тождеств. отображению.

2. Расширенная комплексная плоскость (**сфера Римана**) $\overline{\mathbb{C}}$, получающаяся добавлением к $\mathbb{C}$ бесконечно удалённой точки, является Р. п. В этом случае атлас можно выбрать состоящим из двух карт, положив, напр.,

$$U_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\},\quad f_1(z) = z,$$
$$U_2 = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1\},\quad f_2(z) = 1/z.$$

Ф-ция f_1 отображает круг $\{|z| < 2\}$ на себя, а ф-ция f_2 отображает внешность единичного круга на единичный круг. При этом бесконечно удалённая точка переходит в нуль.

3. Р. п. аналитич. ф-ции. Если ф-ция $f(z)$, первоначально заданная в нек-рой окрестности точки z_0, допускает *аналитическое продолжение* вдоль к.-л. замкнутого контура, причём в результате этого продолжения получается ф-ция с др. значениями в окрестности z_0, то точку z_0 до обхода этого контура и ту же точку после его обхода естественно считать разл. точками. Проводя эту процедуру со всеми точками первонач. области определения ф-ции, получаем в результате неоднолистную область, имеющую структуру Р. п. и называемую Р. п. ф-ции $f(z)$. При обходе вдоль контура описанного выше типа говорят о переходе Р. п. на другой лист. Р. п. аналитич. ф-ций позволяет рассматривать *многозначные функции* в $\mathbb{C}$ как однозначные ф-ции на своих Р. п.

4. Пусть Ω — нек-рая область в $\mathbb{C}$ и Γ — нек-рая группа взаимно однозначных аналитич. отображений Ω в себя, причём совокупность точек, получающихся из $z \in \Omega$ при действии Γ, образует дискретное множество в Ω. Отождествляя точки Ω, переходящие друг в друга при преобразованиях из Γ, можно определить поверхность (многообразие), к-рая имеет структуру Р. п. и обозначается Ω/Γ. Напр., преобразования $z \to z + z_0$, где z_0 — фиксиров. число, приводят к поверхности, топологически эквивалентной цилиндру.

Согласно **теореме об униформизации**, любая связная Р. п. эквивалентна либо $\overline{\mathbb{C}}$, либо $\mathbb{C}/\Gamma$, либо $\mathbb{C}_+/\Gamma$, где $\mathbb{C}_+ = \{z = x + iy : y > 0\}$ — верхняя полуплоскость. Др. словами, существует аналитич.