где $\varphi_i(x)$ — заданные ф-ции. В этом случае матрицу $A_{ni}=\varphi_i(x_n)$ наз. **регрессионной матрицей.** Для определения параметров a_i обычно используют *наименьших квадратов метод*, т. е. оценки a_i определяют из условия минимума функционала

$$\Phi=\sum_{n=1}^{N}\left(Y_n-\sum_i A_{ni}a_i\right)^2/\sigma_n^2, \qquad (2)$$

где σ_n^2 — дисперсии ошибок измерений Y_n в предположении, что они не коррелированы, и из минимума функционала

$$\Phi=\sum_{n,m}\left(Y_n-\sum_i A_{ni}a_i\right)(R^{-1})_{nm}\left(Y_m-\sum_i A_{mi}a_i\right)$$

для коррелиров. измерений с корреляц. матрицей R.

В качестве ф-ций $\varphi_i(x)$ при небольших I ($I\leqslant 5$) обычно служат степенные ф-ции $\varphi_i(x)=x^i$. Часто используют ортогональные и нормированные полиномы на множестве x_n:

$$\varphi_i(x)=\sum_{k=1}^{i}c_k^i x^k,\ \sum_n\varphi_i(x_n)\sigma_n^{-2}\varphi_j(x_n)=\delta_{ij}. \qquad (3)$$

В этом случае легко найти оценку $\hat{a}_i$:

$$\hat{a}_i=\sum_n\varphi_i(x_n)Y_n. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что вычисление $\hat{a}_i$ не зависит от вычисления других $\hat{a}_j$.

Популярно использование в качестве $\varphi_i(x)$ **сплайнов** $B_i(x)$, к-рые обладают двумя осн. свойствами: а) $B_i(x)$ — полином заданной степени; б) $B_i(x)$ отличен от нуля в огранич. окрестности точки x_i.

При поиске ф-ции регрессии в виде (1) естественно возникает вопрос о кол-ве членов I в сумме (1). При малом значении I нельзя достичь хорошего описания $\bar{Y}(x)$, а при большом — велики статистич. ошибки ф-ции регрессии.

В предположении, что вектор ошибок измерений Y_n распределён нормально, можно использовать *статистические критерии* и выбрать то I, к-рое является оптимальным при данном множестве измерений Y_n. В случае, когда $\varphi_i(x)$ — ортогональные полиномы, это особенно просто. Как видно из (4), дисперсия $\hat{a}_i$ равна 1 и по значению a_{I+1} можно легко заключить, нужно ли включать $\varphi_{I+1}(x)$ в сумму (1).

Лит.: Клепиков Н. П., Соколов С. Н., Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия, М., 1964; Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; Себер Дж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980. *В. П. Жигунов.*

РЕГУЛЯРИЗА́ЦИЯ — придание смысла расходящимся выражениям с помощью подходящего предельного процесса. Р. тесно связана с классич. методами суммирования расходящихся рядов и интегралов: применяется в теории обобщённых ф-ций, в квантовой теории поля и в др. областях теоретич. физики.

Каждая локально суммируемая ф-ция $f(x)$ в области $O\subset\mathbb{R}^n$ задаёт распределение (*обобщённую функцию*) $f\in D'(O)$ по правилу

$$(f,\varphi)=\int f(x)\varphi(x)d^nx,\ \varphi\in D(O)$$

(такое распределение наз. регулярным). Если же $f(x)$ не является локально суммируемой, то интеграл справа расходится и для придания ему смысла используется Р. При этом разл. Р. порождают разл. распределения, и выбор конкретной Р. диктуется решаемой физ. задачей.

Пример. Ф-ция x^{-1} не является локально суммируемой в $\mathbb{R}^1$. Она имеет регуляризации px^{-1}, $(x+iO)^{-1}$, $(x-iO)^{-1}$, где

$$\left(p\frac{1}{x},\varphi\right)=V.p.\int\frac{\varphi(x)}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right\},$$

$$\left(\frac{1}{x+iO},\varphi\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{x+iO}dx,\ \varphi\in D(\mathbb{R}^1),$$

где $V.\ p.$ означает *главное значение интеграла*. Остальные Р. ф-ции x^{-1} получаются линейными комбинациями приведённых.

Р. применяется также для представления данного распределения в виде предела последовательности регулярных распределений. Напр., *дельта-функция* Дирака имеет Р.

$$(\delta(x),\varphi(x))=\varphi(0)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx,\ \varphi\in D(\mathbb{R}^1).$$

Обычно Р. распределений используется при перемножении распределений. Напр.,

$$\left(\frac{1}{x+iO}\cdot\frac{1}{x+iO},\varphi\right)=\left(\frac{1}{(x+iO)^2},\varphi\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\frac{\varphi(x)dx}{(x+i\varepsilon)^2},\ \varphi\in D(\mathbb{R}^1).$$

Известный физ. пример — перемножение одночастотных ф-ций в *квантовой теории поля*. Часто, напр. при перемножении причинных ф-ций, такая процедура не приводит к однозначному ответу и требует доопределения, согласованного с физ. контекстом задачи (см. *Ультрафиолетовые расходимости*, *Перенормировки*). Пример подобного доопределения — *R-операция* Боголюбова — Парасюка. О др. конкретных приёмах Р., применяемых в физ. приложениях, см. в ст. *Регуляризация расходимостей* в квантовой теории поля.

Лит.: Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979. *В. В. Жаринов.*

РЕГУЛЯРИЗА́ЦИЯ РАСХОДИ́МОСТЕЙ в **квантовой теории поля** (КТП) — вспомогат. операция, заключающаяся в замене *пропагаторов* или интегралов от их произведений (соответствующих локальной КТП) на нек-рые аппроксимирующие их выражения, не содержащие *ультрафиолетовых расходимостей* или соответствующих им в координатном представлении сингулярностей на световом конусе. Такие регуляризованные интегралы явно вычисляют (в импульсном представлении), а затем уже в вычисленных выражениях производят операцию, обратную введению регуляризации, т. е. переходят к реальному физ. пределу. УФ-сингулярности при этом выделяются в виде аддитивных составляющих, имеющих простую (напр., полиномиальную) структуру по внеш. импульсам.

Необходимость Р. р. наиб. просто увидеть в x-представлении. В квантовополевых расчётах приходится иметь дело с произведениями пропагаторов $\Delta(x)$, обладающих сингулярностями типа полюса $1/x^2$ и *дельта-функции* Дирака по квадрату 4-мерного интервала $x^2=(x^0)^2-\mathbf{x}^2$ [здесь $x(x^0,\mathbf{x})$ — точка пространства-времени; используется система единиц, в к-рой $\hbar=c=1$]. Ясно, что квадраты и более высокие степени таких сингулярностей [напр., $\delta^2(x^2)$] не определены математически даже в смысле *обобщённых функций*. Для соответствующего доопределения удобно иметь регулярные (т. е. не имеющие особенностей) приближения к Δ или к произведениям нескольких Δ. Такие приближения и получают посредством вспомогательной Р. р.

В квантовополевых вычислениях по теории возмущений получили распространение неск. разл. регуляризаций. Среди них наиб. употребительны следующие.