или иной группой симметрии задачи (посредством *Нётер теоремы*). В таком случае интегралы движения совпадают (с точностью до множителя) с *генераторами группы* симметрии квантовой системы $\hat{\Lambda}_\alpha$. Коммутатор к.-л. пары генераторов (являющийся в силу теоремы Пуассона интегралом движения) должен к.-л. образом выражаться через все эти генераторы. Обычно эта связь линейна:

$$[\hat{\Lambda}_\alpha, \hat{\Lambda}_\beta] = iC^{\gamma}_{\alpha\beta}\hat{\Lambda}_\gamma \qquad (11)$$

(по индексу $\gamma$ подразумевается суммирование). Ф-лы (11) фактически совпадают с соотношениями, определяющими *Ли алгебру* соответствующей группы симметрии квантовой системы, где $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ — т. н. структурные константы. Следует иметь в виду, что в физ. лит-ре генераторы, как правило, являются эрмитовскими операторами, тогда как в матем. лит-ре — антиэрмитовскими. По этой причине в правой части соотношения (11) возникает мнимая единица $i$, и возможно появление множителя $(-1)$.

В ряде случаев складывается, в известном смысле, обратная ситуация, если не все из имеющихся в данной задаче интегралов движения связаны с явной (следующей из геом. соображений) группой симметрии. Если коммутатор любой пары интегралов движения линейно выражается через все интегралы движения

$$[\hat{M}_\alpha, \hat{M}_\beta] = iD^{\gamma}_{\alpha\beta}\hat{M}_\gamma, \qquad (12)$$

можно попытаться найти группу, алгебра Ли к-рой описывается соотношениями (12). Если такая группа существует, то о ней говорят как о группе «скрытой» симметрии задачи (при этом числа $D^{\gamma}_{\alpha\beta}$ являются структурными константами этой группы). Следующие примеры иллюстрируют изложенное.

1. Свободная частица массы $m$ с импульсом $\boldsymbol{p}$: $\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m$. Группа симметрии — группа движений трёхмерного пространства (совокупность трёхмерных вращений и произвольных трансляций). Имеющиеся в данной задаче интегралы движения — компоненты импульса $\hat{\boldsymbol{p}}$ и момента импульса $\hat{\boldsymbol{L}} = [\hat{\boldsymbol{r}}\ \hat{\boldsymbol{p}}]$, делённые на $\hbar$, представляют собой набор генераторов упомянутой группы.

2. Частица в трёхмерном центр. поле: $\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m + U(\boldsymbol{r})$. Группа симметрии задачи — группа трёхмерных вращений $O(3)$. Компоненты момента импульса $\hat{\boldsymbol{L}}$ (в единицах $\hbar$) являются генераторами группы $O(3)$.

3. Трёхмерный изотропный осциллятор: $\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m + m\omega^2\boldsymbol{r}^2/2$. Явная (геометрическая) симметрия задачи — $O(3)$. Кроме момента импульса $\hat{\boldsymbol{L}}$ имеется ещё три очевидных интеграла движения

$$\hat{H}_k = \frac{\hat{p}_k^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_k^2}{2},$$

$k = 1, 2, 3$ — сохраняющиеся энергии трёх независимых осцилляторов, отвечающих колебаниям вдоль трёх декартовых осей. Они взаимно перестановочны. Коммутаторы вида $[\hat{H}_k, \hat{L}_l]$ порождают интегралы движения

$$K_1 = \frac{p_2 p_3}{m} + m\omega^2 x_2 x_3$$

и т. п. Удобно перейти к следующим операторам:

$$\hat{A}^k_l = \hat{a}^+_k \hat{a}_l;\quad \hat{a}_l = \frac{m\omega\hat{x}_l + i\hat{p}_l}{\sqrt{2m\hbar\omega}};\quad \hat{a}^+_k = \frac{m\omega\hat{x}_k - i\hat{p}_k}{\sqrt{2m\hbar\omega}},$$

через к-рые исходные интегралы движения выражаются в виде линейных комбинаций

$$\hat{H}_1 = \hbar\omega\left(\hat{A}^1_1 + \frac{1}{2}\right), \ldots,$$

$$\hat{K}_1 = \hbar\omega\left(\hat{A}^2_3 + \hat{A}^3_2\right),\quad \hat{L}_1 = i\hbar\left(\hat{A}^3_2 - \hat{A}^2_3\right)$$

и т. п.

Алгебра Ли, связанная с операторами $\hat{A}^k_l$, описывается соотношениями

$$\left[\hat{A}^j_i, \hat{A}^l_k\right] = \delta^l_i \boldsymbol{A}^j_k - \delta^j_k \hat{A}^l_i,$$

представляющими собой канонич. форму алгебры Ли группы трёхмерных унитарных преобразований $U(3)$ — группы «скрытой» симметрии трёхмерного изотропного осциллятора. Отсутствие множителя $i$ в правой части предыдущего соотношения обусловлено неэрмитовостью (вообще говоря) инфинитезимальных операторов $\hat{A}^k_i$.

4. Атом водорода. В атомных единицах ($e = \hbar = m = 1$) гамильтониан задачи имеет вид $\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2 - 1/r$. Кроме момента импульса $\hat{\boldsymbol{L}}$ (безразмерного в используемых единицах) задача обладает специфич. векторным интегралом движения, т. н. вектором Рунге — Ленца:

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{1}{2}[\hat{\boldsymbol{L}}\,\hat{\boldsymbol{p}}] - \frac{1}{2}[\hat{\boldsymbol{p}}\,\hat{\boldsymbol{L}}].$$

Удобно ввести «нормированный» вектор Рунге — Ленца, имея в виду отрицательность энергии в связанных состояниях атома водорода:

$$\hat{\boldsymbol{N}} = \frac{1}{\sqrt{-2\hat{H}}}\hat{\boldsymbol{A}}.$$

Коммутац. соотношения между операторами $\hat{L}_\alpha$ и $\hat{N}_\beta$ имеют вид

$$[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\beta] = ie_{\alpha\beta\gamma}\hat{L}_\gamma;\quad [\hat{L}_\alpha, \hat{N}_\beta] = ie_{\alpha\beta\gamma}\hat{N}_\gamma;$$

$$[\hat{N}_\alpha, \hat{N}_\beta] = ie_{\alpha\beta\gamma}\hat{L}_\gamma;$$

$e_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью антисимметричный единичный псевдотензор в пространстве трёх измерений. Последние соотношения представляют собой алгебру Ли группы вращений четырёхмерного евклидова пространства $O(4)$ — группу «скрытой» симметрии атома водорода.

Аналог П. с. может быть получен в классич. теории поля, если описание этого поля допускает применение гамильтонова формализма. Для двух динамич. величин $F$ и $G$, характеризующих поле как целое, т. е. являющихся интегральными характеристиками поля и тем самым функционалами гамильтоновых переменных $\xi(\boldsymbol{r}, t)$ и $\pi(\boldsymbol{r}, t)$ (играющих роль обобщённых координат и импульсов гамильтоновой системы с конечным числом степеней свободы), П. с. определяются соотношением

$$\{F, G\}_{\text{кл. поле}} = \iiint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\delta F}{\delta\pi}\frac{\delta G}{\delta\xi} - \frac{\delta F}{\delta\xi}\frac{\delta G}{\delta\pi}\right)d^3\boldsymbol{r}, \qquad (13)$$

где $\delta/\delta\pi$, $\delta/\delta\xi$ — т. н. функциональные производные, имеющие в простейшем случае скалярного поля (и лагранжиана 1-го порядка) вид

$$\frac{\delta F}{\delta\pi} = \frac{\partial f}{\partial\pi};\quad \frac{\delta G}{\delta\xi} = \frac{\partial g}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial q}{\partial\nabla\xi}\right),$$

$f$ и $g$ — плотности величин $F$ и $G$:

$$F = \iiint f(\xi(\boldsymbol{r}, t), \pi(\boldsymbol{r}, t), t)\, d^3\boldsymbol{r},$$