Ройчка Р., Теория представлений групп и ее приложения, т. 1—2, пер. с англ., М., 1980; см. также лит. при ст. Группа. *С. И. Азаков.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ТЕОРИЯ в квантовой механике — изучает схемы конкретных реализаций квантовых наблюдаемых как самосопряжённых *операторов*, действующих в гильбертовом пространстве, и состояний как векторов этого пространства.

Традиц. построение аппарата *квантовой механики*, восходящее к П. А. М. Дираку (P. A. M. Dirac), состоит в обобщении введённого В. Гейзенбергом (W. Heisenberg), М. Борном (M. Born) и П. Йорданом (P. Jordan) матричного описания физ. величин в абстрактную алгебраич. схему q-чисел, в к-рой операции дифференцирования по динамич. переменным классич. механики заменяются образованием коммутаторов с канонически сопряжёнными переменными. Для практич. вычислений нужно реализовать элементы этой алгебры операторами в гильбертовом пространстве — пространстве состояний. При этом элементам, имеющим физ. смысл,— квантовым наблюдаемым — должны отвечать самосопряжённые операторы, из собств. векторов к-рых можно набрать в пространстве состояний полную систему. Коммутирующие операторы, относящиеся к одновременно измеримым наблюдаемым a_i (см. *Неопределённостей соотношения*), обладают общей системой собств. векторов. Совокупность n независимых коммутирующих операторов A_i наз. **полным набором**, если любой оператор, коммутирующий со всеми A_i, является их ф-цией.

Пусть $\varphi_{a_1,\ldots,a_n}$ — общая полная система собств. векторов такого набора:

$$A_i\varphi_{a_1,\ldots,a_n}=a_i\varphi_{a_1,\ldots,a_n}.$$

Тогда любой вектор ψ из пространства состояний $\mathscr{H}$ может быть разложен по базису $\varphi_{a_1,\ldots,a_n}$:

$$\psi=\sum_{\{a\}}\psi(a_1,\ldots,a_n)\varphi_{a_1,\ldots,a_n}$$

(суммирование проводится по всем собств. значениям $\{a\}=a_1, a_2,\ldots, a_n$), где $\psi(a_1,\ldots, a_n)$ наз. **волновой функцией в** $\{A_i\}$-**представлении**:

$$\psi(a_1,\ldots,a_n)=(\psi,\varphi_{a_1,\ldots,a_n}),$$

причём скалярное произведение $(\ldots,\ldots)$ в $\mathscr{H}$ определено ф-лой

$$(\psi_1,\psi_2)=\sum_{\{a\}}\psi_1(a_1,\ldots,a_n)\psi_2^*(a_1,\ldots,a_n).$$

Действие A_i сводится в $\{A_i\}$-представлении к умножению на число:

$$A_i\psi(a_1,\ldots,a_n)=a_i\psi(a_1,\ldots,a_n),$$

а для любого другого самосопряжённого оператора C выражается через матричные элементы

$$c_{\{a\},\{a'\}}=(\varphi_{a_1,\ldots,a_n},C\varphi_{a'_1,\ldots,a'_n})$$

в выбранном базисе:

$$C\psi(a_1,\ldots,a_n)=\sum_{\{a'\}}c_{\{a\},\{a'\}}\psi\left(a'_1,\ldots,a'_n\right).$$

Из существования разл. полных наборов коммутирующих операторов вытекает возможность разл. представлений. Переход от одного представления к другому сводится к замене базиса в $\mathscr{H}$:

$$\varphi_{\{a\}}\to\varphi_{\{b\}}=\sum_{\{a\}}(\varphi_{\{b\}},\varphi_{\{a\}})\varphi_{\{a\}}\equiv\sum_{\{a\}}U_{\{b\},\{a\}}\varphi_{\{a\}}.$$

При этом волновая ф-ция в $\{B_k\}$-представлении

$$\psi(b_1,\ldots,b_m)=(\psi,\varphi_{\{b\}})=\sum_{\{a\}}U_{\{b\},\{a\}}\psi(a_1,\ldots,a_n),$$

или

$$\psi\to U\psi,$$

связана с $\psi(a_1,\ldots, a_n)$ унитарным преобразованием: из свойств ортонормированности базисов вытекает

$$\sum_{\{a\}}U_{\{b\},\{a\}}U^*_{\{a\},\{b'\}}=\delta_{\{b\},\{b'\}},$$

или

$$UU^+=1.$$

Матричные элементы операторов преобразуются при этом по ф-ле

$$c_{\{b\},\{b'\}}=\sum_{\{a\},\{a'\}}U_{\{b\},\{a\}}c_{\{a\},\{a'\}}U^*_{\{a'\},\{b'\}},$$

или

$$C\to UCU^{-1}.$$

Благодаря унитарности преобразования старая и новая системы матричных элементов и волновых ф-ций физически эквивалентны: спектры операторов, ср. значения и вероятности переходов совпадают.

Унитарные преобразования являются квантовым аналогом классич. канонич. преобразований. Эта аналогия не сводится, однако, к взаимно однозначному соответствию. С одной стороны, согласно принципу неопределённости, точные значения в данном представлении может принимать только половина квантовых наблюдаемых, причём имеется значит. произвол в выборе этой половины. Поэтому число квантовых представлений значительно больше числа наборов классич. канонич. переменных. С др. стороны, не все наборы классич. канонич. переменных имеют квантовый аналог. Простейшим примером служат переменные действие — угол: в отличие от действия, квантовый аналог угла не существует как самосопряжённый оператор.

Описанная выше «идеальная» схема реализуется лишь в простейшем случае операторов с чисто точечным спектром. В действительности уже такие естеств. квантовые наблюдаемые, как координаты и импульсы, имеют непрерывный спектр и представлены неогранич. операторами. Собств. ф-ции неогранич. операторов не принадлежат гильбертову пространству и оказываются *обобщёнными функциями*. Сами эти операторы хорошо определены не на всём $\mathscr{H}$, а лишь на его плотном подмножестве, на к-ром указанные обобщённые ф-ции являются линейными функционалами. При этом проблема квантования ставится как задача конструирования представлений **канонических** *перестановочных соотношений* в $\mathscr{H}$.

В простом, но нетривиальном примере бесструктурной частицы независимыми наблюдаемыми служат координаты Q_i и импульсы P_i ($i=1, 2, 3$), подчиняющиеся перестановочным соотношениям Гейзенберга:

$$[Q_i,Q_j]=[P_i,P_j]=0,\ [Q_j,P_k]=i\hbar\delta_{ik}.$$

В координатном представлении в качестве полного набора коммутирующих операторов выбираются Q_i. Пространством состояний служит пространство $L^2(\mathbb{R}^3)$ квадратично интегрируемых комплекснозначных ф-ций $\varphi(x)$, $x=x_1, x_2, x_3$, со скалярным произведением

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_1(x)\varphi_2^*(x)dx.$$