Представления конечных групп. Каждая конечная группа компактна. Поэтому утверждения, касающиеся представлений компактных групп, справедливы и для конечных групп, только во всех ф-лах необходимо заменить интегрирование по группе $\int_G d\mu(g)$ суммированием по групповым элементам

$$\int_G d\mu(g) \to |G|^{-1}\sum_{i=1}^{|G|},$$ где $|G|$ — порядок конечной группы.

Конечная группа имеет конечное число неприводимых П. г. Сумма квадратов размерностей всех неприводимых неэквивалентных П. г. равна порядку группы (теорема Бёрнсайда), причём все эти размерности являются делителями порядка группы. Число различных неприводимых представлений конечной группы равно числу классов сопряжённых элементов.

Представления групп Ли. Оператор $T(g)$ представления $D(G, V)$ n-мерной группы Ли, так же как и соответствующий элемент группы Ли, зависит от параметров $a_1, \ldots, a_n$, т. е. $T(g(a)) = T(a_1,\ldots, a_n) \equiv T(a)$. Для т. н. дифференцируемых П. г. ф-ция $T(a)$ дифференцируема [так, в частности, будет, если представление $D(G, V)$ конечномерно], можно ввести набор операторов $t(X_i) = \partial T(a)/\partial a_i \,|_{a=0}$, $i = 1,\ldots, n$, наз. генераторами представления $D(G, V)$; здесь X_i — генераторы группы. В первом приближении по a_i получим $T(a) \approx I + \sum_{i=1}^{n} a_i t(X_i)$. Операторы $t(X_i)$ $(i = 1,\ldots, n)$ образуют базис *Ли алгебры*, к-рая наз. дифференциалом представления. Дифференциал П. г. в свою очередь является представлением алгебры Ли соответствующей группы.

Пусть $g(\alpha)$ — элемент однопараметрич. подгруппы группы G. Связь между П. г. $D(G, V)$ и его дифференциалом [представлением соответствующей алгебры Ли $d(A, V)$] даётся ф-лой $t(X) = dT(g(\alpha))d\alpha \,|_{\alpha=0}$. Если G — связная группа Ли, то её конечномерные представления полностью определяются своими дифференциалами. Напр., если $D(G, V)$ — конечномерное П. г. G, а $d(A, V)$ — представление алгебры Ли A этой группы, являющееся дифференциалом D, то всякое подпространство пространства V, инвариантное относительно D, инвариантно также относительно d. П. г. D и d неприводимы, приводимы и вполне приводимы одновременно. Если $D_1(G, V_1)$ и $D_2(G, V_2)$ — представления связной группы Ли G, а $d_1(A, V_1)$ и $d_2(A, V_2)$ — их дифференциалы, то из эквивалентности $d_1 \sim d_2$ следует эквивалентность $D_1 \sim D_2$ и наоборот. Конечномерные представления связных односвязных групп Ли находятся во взаимно однозначном соответствии с представлениями их алгебр Ли. Эти представления связаны ф-лой $T(g(\alpha)) = \exp(\alpha t(X))$. Для унитарных представлений в гильбертовых пространствах из эквивалентности дифференциалов следует эквивалентность П. г.

Поэтому удобен т. н. инфинитезимальный подход, когда исследование П. г. сводят к исследованию представлений их алгебр. Каждому элементу Y из алгебры Ли A группы Ли G ставится в соответствие оператор $\mathrm{ad}\,(Y) = [Y, X]$, для любого X из A. Т. к. из тождества Якоби следует, что $\mathrm{ad}\,([Y, X]) = [\mathrm{ad}(Y), \mathrm{ad}(X)]$, то операторы $\mathrm{ad}(Y)$ образуют представление алгебры A. Это представление наз. присоединённым представлением алгебры Ли. Если $X_1,\ldots, X_n$ — базис алгебры A, то матричные элементы операторов $\mathrm{ad}(X_i)$ в этом базисе совпадают со структурными константами алгебры Ли: $(\mathrm{ad}(X_i))^k_l = C_i{}^k{}_l$.

Если A — алгебра Ли связной группы G, то представление алгебры ad можно продолжить до представления группы G, действующего в A, как в векторном пространстве. Присоединённым представлением группы наз. такое отображение $\mathrm{Ad}\,(g, A)$, что $\exp\,(\mathrm{Ad}(g)X) = g\exp Xg^{-1}$ для любых $X \in A$ и $g \in G$. Размерность присоединённого П. г. совпадает с размерностью группы Ли.

В рамках инфинитезимального подхода развита теория конечномерных представлений полупростых групп Ли, имеющая важное значение для теории элементарных частиц. Всякое конечномерное представление полупростой алгебры вполне приводимо. Поэтому исследование конечномерных представлений полупростых алгебр сводится к исследованию неприводимых конечномерных представлений.

Для классификации неприводимых конечномерных представлений комплексных алгебр Ли используют т. н. теорию старших весов. Пусть эрмитовы операторы H_i $(i = 1,\ldots, r;$ r — размерность группы Ли $G)$ — базисные элементы подалгебры Картана. Рассмотрим комплексное конечномерное представление $d(A, V)$ алгебры Ли A группы G. Тогда операторы $t(H_i) \in d(A, V)$ эрмитовы, они коммутируют друг с другом и поэтому имеют общие собств. векторы $\psi_m \in V$, такие, что $t(H_i)\psi_m = m_i\psi_m$ $(i = 1, \ldots, r)$; r-мерный веществ. вектор $m = (m_1\ldots m_r)$, соответствующий ψ_m, называется весом ψ_m в $d(A, V)$.

Обозначим через W множество всех элементов g полупростой группы Ли G, обладающих тем свойством, что $gKg^{-1} = K$, где K — подгруппа Картана группы G (K — группа, алгеброй к-рой является подалгебра Картана). Множество W является подгруппой G, причём $K \in W$ и является нормальным делителем W. Фактор-группа W/K наз. группой отражений Вейля. Эта группа конечна.

Два веса m и m' наз. эквивалентными, если они связаны друг с другом группой отражений Вейля. Число разл. весов не превышает размерности представления. Говорят, что вес m старше веса m', если вектор $m - m'$ положителен, т. е. его первая отличная от нуля компонента положительна. Старший вес из множества эквивалентных весов наз. доминантным. Вес, к-рый старше всех остальных весов представления, наз. старшим весом представления.

Неприводимое конечномерное представление полупростой алгебры Ли полностью определяется своим старшим весом (теорема Картана). Для каждой простой алгебры Ли с r-мерной подалгеброй Картана имеется r доминантных весов $M^{(i)}$ $(i = 1,\ldots, r)$, называемых фундаментальными, таких, что остальные доминантные веса можно представить в виде $M = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i M^{(i)} = M(\lambda_1,\ldots, \lambda_r)$, где $\{\lambda_i\}$ — набор неотрицат. целых чисел. Существует r т. н. фундаментальных неприводимых конечномерных представлений простой алгебры, к-рые имеют r фундаментальных доминантных весов в качестве своих старших весов. Соответствующее П. г. наз. фундаментальным.

До сих пор речь шла об однозначных П. г., когда каждому элементу группы g ставился в соответствие только один оператор $T(g)$. Если группа G не является односвязной, то для того, чтобы П. г. было непрерывным, возникает необходимость каждому элементу группы g ставить одновременно в соответствие неск. разл. операторов $T_1(g), T_2(g),\ldots, T_m(g)$. Такое П. г. наз. m-значным.

Лит.: Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965; Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; Менский М. Б., Метод индуцированных представлений. Пространство — время и концепция частиц, М., 1976; Климык А. У., Матричные элементы и коэффициенты Клебша — Гордана представлений групп, К., 1979; Барут А.,