момента $\hat{L}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2$ также имеет лишь дискретные собств. значения $\hbar^2 l(l+1)$, где l — целое или полуцелое неотрицат. число. При заданном l имеем $m = l, l-1, \ldots, -l$. Если l целое, то l и m и являются упомянутыми орбитальным и магнитным квантовыми числами.

Если $n = 8$, а П. с. имеют ту же форму $[A_j, A_k] = i\sum_l \varepsilon_{jkl} A_l$, но $j,k,l = 1,2,\ldots,8$, то П. с. определяют алгебру Ли группы SU_3. Её генераторы порождают, напр., «вращения» в пространстве цветов *кварка*. По отношению к таким вращениям симметричен гамильтониан *квантовой хромодинамики* — теории, описывающей сильное взаимодействие элементарных частиц. Физ. состояния квантовой хромодинамики должны быть «бесцветными», т. е. принадлежать одномерным (синглетным) представлениям группы SU_3.

Пусть $n = 3$, а $A_1 = \hat{q}$, $A_2 = \hat{p}$, $A_3 = \hat{I}$, где $\hat{I}$ — единичный оператор, а $\hat{q}$ и $\hat{p}$ — операторы координаты и импульса частицы. Равенство $[\hat{q}\hat{p}] = i\hbar\hat{I}$ задаёт т. н. канонические П. с. для системы с одной степенью свободы. Они определяют алгебру Ли группы Гейзенберга. Из них видно, что координата и импульс не могут принимать одновременно определ. значения. Если Δq и Δp — неопределённости в значениях координаты и импульса, то $\Delta q \Delta p \geqslant \hbar$. Это — частный случай *неопределённостей соотношения*. Для системы с m степенями свободы, т. е. для системы, гамильтониан к-рой зависит от m операторов обобщённых координат $\hat{q}_1,\ldots,\hat{q}_m$ и от m сопряжённых этим координатам импульсов $\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_m$, канонич. П. с. имеют вид $[\hat{q}_i,\hat{p}_i] = i\hbar\hat{I}$ (здесь выписаны только ненулевые коммутаторы). Вообще, переход от классического к квантовому описанию физ. системы можно трактовать как замену классических *Пуассона скобок* коммутаторами операторов соответствующих величин. Из канонич. П. с. следует, что каждая пара канонич. переменных q_i, p_i удовлетворяет соотношению неопределённостей. В представлении, в к-ром все операторы координат диагональны [т. е. в представлении, где состояние задаётся волновой ф-цией $\Psi(q_1,\ldots,q_m)$, причём $\hat{q}_j\Psi = q_j\Psi$], операторы импульсов действуют по правилу $\hat{p}_j\Psi = (\hbar/i)\partial\Psi/\partial q_j$. В случае конечного числа степеней свободы все др. корректные представления канонич. П. с. связаны с описанным посредством нек-рого унитарного преобразования, т. е. эквивалентны ему. Часто вместо координат и импульсов используют операторы рождения $a_j^+ = (\hat{q}_j - i\hat{p}_j)/\sqrt{2}$ и уничтожения $a_j = (\hat{q}_j + i\hat{p}_j)/\sqrt{2}$. П. с. для них принимают форму $[a_j, a_j^+] = \hbar\hat{I}$ (выписаны только ненулевые коммутаторы). В случае бесконечного числа степеней свободы (когда $m = \infty$) разл. представления канонич. П. с. уже не обязательно эквивалентны друг другу. Обычно используют *Фока представление* или представление с *вакуумом*.

Важнейшие системы с бесконечным числом степеней свободы — релятивистские квантовые поля. Так, свободное скалярное безмассовое веществ. поле $\varphi(x) = \varphi(x_0, \boldsymbol{x})$, зависящее от времени x_0 и координат $\boldsymbol{x}$ пространств. точки, задано равенством

$$\varphi(x_0,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}}\int\frac{d\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\{\exp(i|\mathbf{k}|x_0 - i\mathbf{k}\boldsymbol{x})a^+(\mathbf{k}) + \exp(-i|\mathbf{k}|x_0 + i\mathbf{k}\boldsymbol{x})a(\mathbf{k})\}$$

(в системе единиц, в к-рой $\hbar = c = 1$). Операторные ф-ции $a^+(\mathbf{k})$ и $a(\mathbf{k})$ удовлетворяют П. с. $[a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, где $\delta(\mathbf{k})$ — *дельта-функция* Дирака. С дискретными операторами рождения и уничтожения a_j^+ и a_j функции $a^+(\mathbf{k})$ и $a(\mathbf{k})$ связаны равенствами

$$a_j^+ = \int d\mathbf{k}\, v_j(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) \text{ и } a_j = \int d\mathbf{k}\, v_j(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}),$$

причём $\{v_j(\mathbf{k})\}$ — нек-рая ортонормиров. система ф-ций. Свободное поле $\varphi(x)$ подчинено след. одновременным П. с.:

$$\left[\dot{\varphi}(x_0,\boldsymbol{x}), \varphi(x_0',\boldsymbol{x}')\right]_{x_0 = x_0'} = i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'),$$

где точка означает производную по времени. Если времена x_0 и x_0' различны, то $[\varphi(x), \varphi(x')] = D(x - x')$, где $D(x)$ — *перестановочная функция* Паули — Йордана. Взаимодействующие поля обладают только частью свойств свободных полей, выраженных П. с., они должны быть локально коммутативны, т. е. их коммутаторы должны обращаться в нуль в точках, разделённых пространственноподобным интервалом (см. *Локальная коммутативность*). Одновременные П. с. для взаимодействующих полей теряют смысл в силу *Хаага теоремы*.

Классич. пример П. с. с участием антикоммутаторов или, как говорят, антиперестановочных соотношений — алгебра *Дирака матриц* γ: $\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ ($g_{\mu\nu}$ — метрич. тензор, $\mu, \nu = 0,1,2,3$; $-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$). Физически существенны только эти алгебраич. равенства, конкретный выбор γ-матриц не играет роли. Антиперестановочным соотношениям удовлетворяет фермионное спинорное поле $\psi_\mu(x)$. Ненулевые антикоммутаторы для поля ψ имеют вид

$$\{\psi_\mu(x'), \bar{\psi}_\nu(x')\} = i\sum_\alpha\left(\gamma_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)_{\mu\nu} D(x - x'),$$

где $\bar{\psi}$ — дираковски сопряжённый к ψ спинор: $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_0$ (ψ^+ — эрмитово сопряжённый спинор). В релятивистской квантовой теории используются также П. с., в к-рые входят сразу и антикоммутаторы и коммутаторы физ. величин. Такие П. с. наз. супералгебрами. Если теория инвариантна относительно преобразований, образующих нек-рую супералгебру, она наз. суперсимметричной квантовой теорией поля (см. *Суперсимметрия*).

Лит.: Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; Дирак П. А. М., Принципы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

О. И. Завьялов.

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ФУНКЦИИ — коммутаторы (или антикоммутаторы) операторов свободных бозонных (фермионных) полей, взятых в разных пространственно-временных точках $x = (x_0, \boldsymbol{x})$ и $y = (y_0, \boldsymbol{y})$. Так, в теории вещественного скалярного поля $\varphi(x)$ П. ф. есть

$$D(x - y) = i[\varphi(x), \varphi(y)]_- \qquad (1)$$

[В. Паули (W. Pauli), П. Йордан (P. Jordan), 1922]. Важнейшее свойство П. ф.— обращение их в нуль вне *светового конуса*, т. е. при $(x - y)^2 = (x_0 - y_0)^2 - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^2 < 0$. Это свойство отражает *микропричинность* локальных квантовых теорий поля: любые операторы, определённые в точках, разделённых пространственноподобным интервалом, всегда коммутируют (даже при учёте взаимодействия), и соответствующие динамич. величины допускают независимое измерение. Явное выражение для $D(x)$ (в системе единиц $\hbar = c = 1$) имеет вид

$$D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{x}}\varepsilon(k_0)\delta(k^2 - m^2)d^4k = \frac{1}{2\pi}\varepsilon(x_0)\delta(x^2) - \frac{m}{4\pi\sqrt{x^2}}\varepsilon(x_0)\theta(x^2)J_1(m\sqrt{x}), \qquad (2)$$

где m — масса скалярной частицы, $k = (k_0, \mathbf{k})$ — 4-импульс, $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака, $\varepsilon(z) = z/|z|$, $\Theta(z) = {}^1/_2[1 + \varepsilon(z)]$ и $J_1(z)$ — ф-ция Бесселя (см. *Цилиндрические функции*). Т. о., $D(x)$ является обобщённой ф-цией с сингулярностью на световом конусе $x^2 = 0$.