и оптике основан на разложении ф-ций в ряды по тригонометрич. системе. В любых задачах на собств. значения операторов также появляются О. с. ф., т. к. для эрмитова оператора $\hat{H}$ собств. ф-ции, отвечающие разл. собств. значениям, ортогональны между собой. В квантовой механике, где квадрат модуля волновой ф-ции $|\psi(x)|^2$ играет роль плотности распределения вероятности, свойство ортонормируемости отражает тот факт, что полная вероятность найти частицу в данном состоянии равна 1, если известно, что система находится в состоянии с определённым квантовым числом.

Лит.: Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; Шилов Г. Е., Математический анализ. Функции одного переменного, ч. 3, М., 1970; Рихтмайер Р., Принципы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1982.

Л. О. Чехов.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ — системы полиномов $\{p_n(x)\}$, $n = 0, 1, \ldots$, ортогональных с весом $\rho(x) \geqslant 0$ на интервале (a, b):

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)\rho(x)dx = \delta_{mn}d_n^2, \qquad (1)$$

где d_n^2 — квадрат нормы. Подобные системы возникают в разл. задачах матем. физики: в теории представлений групп, в вычислит. математике, при решении задач на собственные значения в теории волн, квантовой механике и др.

Задание веса $\rho(x)$ и интервала (a, b) определяет полином $p_n(x)$, удовлетворяющий соотношению ортогональности (1) однозначно, с точностью до нормировочного множителя. Для полиномов $p_n(x)$ справедливо след. явное выражение в виде определителя:

$$p_n(x) = A_n \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \ldots c_n \\ c_1 & c_2 \ldots c_{n+1} \\ \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n \ldots c_{2n-1} \\ 1 & x \ldots x^n \end{vmatrix},$$

где A_n — нормировочная постоянная, $c_k = \int_a^b x^k\rho(x)dx$ — момент весовой ф-ции $\rho(x)$. Из соотношений ортогональности (1) можно получить мн. свойства О. п. Напр.: полином $p_n(x)$ ортогонален произвольному полиному меньшей степени; для произвольных О. п. справедлива рекуррентная ф-ла, связывающая три последоват. полинома $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$, $p_{n+1}(x)$,

$$xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x),$$

где α_n, β_n, γ_n — постоянные.

Классические О. п. — полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита, часто встречающиеся в теоретич. и матем. физике. Классич. О. п. удовлетворяют ур-ниям вида

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \qquad (2)$$

где $\sigma(x)$ — полином степени не выше 2, $\tau(x)$ — полином степени не выше 1, λ — постоянная. Ур-ние (2) можно записать в самосопряжённом виде

$$[\sigma(x)\rho(x)y']' + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad (3)$$

где ф-ция $\rho(x)$ удовлетворяет ур-нию

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x).$$

При значениях

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - n(n-1)\sigma''/2, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

ур-ние (2) имеет полиномиальные решения $y = y_n(x)$, к-рые можно представить в виде ф-лы Родрига

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\rho(x)], \qquad (4)$$

где B_n — нормировочная постоянная.

Т. к. производные от решений ур-ния (2) также удовлетворяют ур-нию того же вида, то получаем ф-лу Родрига для производных от полиномов $y_n(x)$:

$$y_n^{(m)}(x) = \frac{A_{mn}B_n}{\sigma^m(x)\rho(x)}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[\sigma^n(x)\rho(x)],$$

$$A_{mn} = \frac{n!}{(n-m)!}\prod_{k=0}^{m-1}\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right), \quad A_{0n} = 1.$$

При помощи линейной замены независимой переменной, не меняющей вида ур-ния (2), полиномы $y_n(x)$, ф-ции $\sigma(x)$ и $\rho(x)$ можно привести к след. канонич. видам.

1) Полиномы Якоби:

$$y_n(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}],$$

$$\sigma(x) = 1 - x^2, \ \rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta.$$

Частными случаями полиномов Якоби являются: а) полиномы Лежандра $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$; б) полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода

$$T_n(x) = \frac{n!}{(1/2)_n}P_n^{(-1/2,-1/2)}(x) = \cos n\varphi,$$

$$U_n(x) = \frac{n+1!}{(3/2)_n}P_n^{(1/2,1/2)}(x) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi};$$

$$\varphi = \arccos x;$$

в) полиномы Гегенбауэра (ультрасферич. полиномы)

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n}P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(x).$$

Здесь $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$, $(\alpha)_0 = 1$.

Через полиномы Якоби можно выразить также сферические гармоники и обобщённые сферич. ф-ции (*Вигнера функции*).

2) Полиномы Лагерра:

$$y_n(x) = L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}),$$

$$\sigma(x) = x, \quad \rho(x) = x^\alpha e^{-x}.$$

3) Полиномы Эрмита:

$$y_n(x) = H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \ \sigma(x) = 1, \ \rho(x) = e^{-x^2}.$$

Ф-лы дифференцирования для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита:

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),$$

$$\frac{d}{dx}L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad \frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Если полином $\sigma(x)$ имеет кратные корни, т. е. $\sigma(x) = (x-a)^2$, то соответствующие полиномы $y_n(x)$ можно выразить через полиномы Лагерра:

$$y_n(x) = C_n(x-a)^n L_n^\alpha\left(\frac{\tau(a)}{x-a}\right), \quad \alpha = -\tau' - 2n + 1$$

(C_n — нормировочная постоянная). Полиномы $y_n(x)$, для к-рых ф-ция $\rho(x)$ удовлетворяет условию

$$\sigma(x)\rho(x)x^k|_{x=a,b} = 0 \qquad (5)$$

(a, b — вещественные числа; $k = 0, 1, \ldots$), ортогональны с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b), т. е.

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x)dx = \delta_{mn}d_n^2.$$

Отсюда следует, что полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ортогональны с весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ на интервале $(-1, 1)$