взять любой функционал от сохраняющейся ф-ции $a(\lambda)$. Интегралы вида

$$I_p = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda/2)^{2p+1}\ln a(\lambda)d\lambda$$

можно выразить через ф-цию u и её производные по x, напр.:

$$I_1 = \int u dx,\quad I_2 = \int u^2 dx,\quad I_3 = \int\left(u^3 + u_x^2/2\right)dx.$$

Все ур-ния (8) являются *гамильтоновыми системами*. Однако гамильтонова структура задаётся для них неоднозначно. Для задания этой структуры нужно определить скобку Пуассона $\{\alpha, \beta\}$ между функционалами от ф-ции u. Кроме обычной скобки Пуассона

$$\{\alpha, \beta\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\left[\frac{\delta\alpha}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\beta}{\delta u}\right]$$

можно ввести след. скобку Пуассона

$$\{\alpha, \beta\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\left[\frac{\delta\alpha}{\delta u}F(\hat{\Lambda}, t)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\beta}{\delta u}\right].$$

Здесь $F(\xi, t)$ — произвольная рациональная ф-ция переменной ξ.

Любая из скобок Пуассона между любыми двумя интегралами движения равна 0. Этот факт тесно связан со свойством полной интегрируемости: нелинейное ур-ние в частных производных (8) распадается на бесконечную систему обыкновенных дифференц. ур-ний.

Дальнейшее расширение класса ур-ний, к к-рым применим О. з. р. м., связано с др. выбором оператора $\hat{L}$. В качестве $\hat{L}$ можно взять оператор 3-го или более высокого порядка. С каждым оператором $\hat{L}$ связаны свой рекурсионный оператор и своя бесконечная серия ур-ний вида (8). Лишь нек-рые из этих ур-ний имеют физ. применения. Так, оператор 3-го порядка позволяет исследовать возникающее в теории нелинейных волн ур-ние Буссинеска

$$u_{tt} + u_{xx} + u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0.$$

В качестве оператора $\hat{L}$ можно взять разностные операторы, что позволяет применить О. з. р. м. к дифференциально-разностным ур-ниям, среди к-рых особенно интересны ур-ние Вольтерры

$$\dot{N}_{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}}(N_{\mathbf{k}-1} - N_{\mathbf{k}+1}),$$

встречающееся в матем. биофизике и теории плазменной турбулентности, а также ур-ние для цепочки Тода

$$\ddot{N}_{\mathbf{k}} = \exp(N_{\mathbf{k}-1} - N_{\mathbf{k}}) - \exp(N_{\mathbf{k}} - N_{\mathbf{k}+1}),$$

описывающее нелинейную модель одномерного кристалла. Оператор $\hat{L}$ может быть сингулярным интегральным оператором, такие операторы возникают в краевых задачах теории аналитич. ф-ций. Их можно использовать для изучения нелинейных ур-ний, возникающих в теории внутр. волн. Оператор $\hat{L}$ может быть матричным. Так, для применения О. з. р. м. к *Шрёдингера уравнению нелинейному* нужно подставить в ур-ние (2) вместо оператора $\hat{L}$ одномерный оператор Дирака (см. *Дирака уравнение*). При изучении важной для нелинейной оптики задачи о резонансном взаимодействии системы трёх волн с помощью О. з. р. м. в качестве $\hat{L}$ следует использовать обобщение оператора Дирака.

Обобщения метода. Описанная схема О. з. р. м. допускает разл. обобщения. Зависимость ур-ний, входящих в линейную систему, от спектрального параметра λ может описываться рациональными или эллиптич. ф-циями и даже дифференц. операторами по λ. Условия совместности линейной системы образуют разнообразный набор нелинейных ур-ний, имеющих, вообще говоря, переменные коэффициенты. Многие из этих ур-ний находят применение в физике, напр. в нелинейной оптике, теории ферромагнетизма и общей теории относительности. Для отыскания солитонных решений этих ур-ний развиты простые методы, основанные на свойствах аналитич. ф-ций.

Существует неск. вариантов обобщения О. з. р. м. на многомерный случай, однако лишь нек-рые ур-ния используются в физике, напр. *Кадомцева — Петвиашвили уравнение* и ур-ние дуальности для *Янга — Миллса полей*. Теория таких ур-ний не завершена.

Развитие О. з. р. м. позволило по-новому взглянуть на теорию конечномерных интегрируемых систем. В О. з. р. м. можно включить почти все известные системы такого рода. О. з. р. м. стимулировал исследования в разл. областях математики (спектральная теория дифференц. операторов, классич. алгебраич. геометрия). Результаты этих исследований используются в теории элементарных частиц (релятивистские струны).

Лит.: Теория солитонов. Метод обратной задачи, М., 1980; Лэм Дж., Введение в теорию солитонов, пер. с англ., М., 1983; Абловиц М., Сигур Х., Солитоны и метод обратной задачи, пер. с англ., М., 1987. *В. Е. Захаров.*

ОБРАЩЕ́НИЕ ВОЛНОВО́ГО ФРО́НТА — автоматич. формирование с помощью разл. физ. механизмов и схемных решений т. н. обращённого пучка, в той или иной мере соответствующего обращённой во времени картине распространения падающего (входного) пучка. Наиб. развитие и осн. перспективы приложений О. в. ф. связаны с лазерными пучками.

На первый взгляд, создание обращённого во времени движения в равной мере может осуществляться и в механике взаимодействующих частиц, и в механике сплошной среды, и во всех др. физ. системах, где микроскопич. ур-ния движения ковариантны относительно замены знака времени. Однако для подавляющего большинства физ. систем характерна сильная неустойчивость поведения конкретных микротраекторий по отношению к малым возмущениям нач. условий. В результате даже чрезвычайно точное одновременное и мгновенное изменение знака всех обобщённых импульсов создаст картину обращённого движения лишь на небольшом интервале времени, после чего система станет необратимо эволюционировать в направлении роста энтропии (см. *Обращение времени*).

Исключением являются системы с линейными незатухающими колебаниями, а также волны в линейных недиссипативных средах. При распространении светового пучка в линейной поглощающей среде (в общем случае — пространственно неоднородной) сохраняются его энтропия, спектральная темп-ра, яркость и т. п. величины, что указывает на отсутствие неустойчивостей и на возможность обращения процесса.

Для монохроматич. световых полей

$$\boldsymbol{E}_{\text{вещ}}(\boldsymbol{R}, t) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})e^{-i\omega t} + \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{R})e^{+i\omega t}] \qquad (1)$$

систему ур-ний Максвелла в непоглощающей немагн. среде с симметричным веществ. тензором диэлектрич. проницаемости $\varepsilon_{i\mathbf{k}}(\boldsymbol{R}) = \varepsilon_{\mathbf{k}i}(\boldsymbol{R}) = \varepsilon^*_{i\mathbf{k}}(\boldsymbol{R})$ можно свести к линейному ур-нию

$$\mathrm{rot\,rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) - \frac{\omega^2}{c^2}\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{R})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = 0 \qquad (2)$$

для комплексной амплитуды поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})$. Тогда матем. формулировка возможности существования обращённой волны состоит в том, что любому решению ур-ния (2) можно поставить в соответствие ф-цию $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{R}) = C\boldsymbol{E}_1^*(\boldsymbol{R})$, к-рая будет решением того же ур-ния (2) при любой комплексной константе $C = |C|e^{i\alpha}$. Звёздочка означает операцию комплексного сопряжения:

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{R}) = C[\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{R})e^{i\varphi_1(\boldsymbol{R})}]^* = C[\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{R})e^{-i\varphi_1(\boldsymbol{R})}],$$

т. е. изменения знака пространственно зависящей фазы φ поля; поэтому в англоязычной научной литерату-