тегрируемой в O' ф-цией $f_0(x)$, если её сужение на O' есть f_0, т. е. в соответствии с (2)

$$(f, \varphi) = \int f_0(x)\varphi(x)dx$$

для всех $\varphi \in D(O')$, при этом считается $f = f_0(x)$, $x \in O'$. В частности, при $f_0 \equiv 0$ получается определение того, что О. ф. f обращается в нуль в O'. Множество точек O, ни в какой окрестности к-рых О. ф. f не обращается в нуль, наз. *носителем* О. ф. f и обозначается $\operatorname{supp} f$. Если $\operatorname{supp} f \Subset O$, то О. ф. f наз. *финитной в* O.

Справедлива *теорема о кусочном склеивании* О. ф.: пусть в окрестности $U_y \subset O$ каждой точки y задана О. ф. f_y из $D'(U_y)$, причём элементы f_y согласованы, т. е. $f_{y_1} = f_{y_2}$ в $U_{y_1} \cap U_{y_2}$; тогда существует О. ф. f из $D'(O)$, совпадающая с f_y в U_y при всех $y \in O$.

Напр., для δ-функции Дирака: $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$. О. ф. $\mathscr{P}(1/x)$, определяемая равенством

$$(\mathscr{P}(1/x), \varphi) = \mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)x^{-1}dx, \ \varphi \in D(\mathbb{R}^1),$$

наз. *главным значением интеграла* от ф-ции $1/x$; $\operatorname{supp} \mathscr{P}(1/x) = \mathbb{R}^1$. О. ф. $\mathscr{P}(1/x)$ сингулярна в $\mathbb{R}^1$, однако на открытом множестве $x \neq 0$ она регулярна и совпадает с $1/x$.

Поверхностная δ-функция. Пусть S — кусочно гладкая поверхность и μ — непрерывная ф-ция на S. О. ф. $\mu\delta_S$ определяется равенством

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(x)\varphi(x)dS_x.$$

При этом $\mu\delta_S(x) = 0$ вне S, $\mu\delta_S$ — сингулярная О. ф. Эта О. ф. описывает пространств. плотность масс или зарядов, сосредоточенных на поверхности S с поверхностной плотностью μ (*плотность простого слоя*).

Линейные операции над О. ф. вводят как расширение соответствующих операций над основными ф-циями.

Замена переменных. Пусть $f \in D'(O)$ и $x = Ay + b$ — линейное преобразование O на O_1, $\det A \neq 0$. О. ф. $f(Ay + b)$ из $D'(O')$ определяют равенством

$$(f(Ay + b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x - b)]}{|\det A|}\right), \ \varphi \in D(O_1). \qquad (3)$$

В частности, если $A = \lambda I$, $\lambda \neq 0$ ($x = \lambda y$ — подобие), то $(f\lambda(y), \varphi) = |\lambda|^{-1}(f, \varphi(x/\lambda))$; если $A = I$ ($x = y + b$ — сдвиг на b), то $(f(y + b), \varphi) = (f, \varphi(x - b))$. Ф-ла (3) позволяет определить трансляционно инвариантные, сферически симметричные, центрально симметричные, однородные, периодические и т. д. О. ф.

Пусть непрерывно дифференцируемая ф-ция a имеет только простые нули $x_1, x_2, \ldots$ на оси $\mathbb{R}^1$. Ф-цию $\delta(a(x))$ определяют равенством

$$\delta(a(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta(x - x_k)}{|a'(x_k)|}.$$

Напр., $\delta(-x) = \delta(x)$; $(\delta(x - x_0), \varphi) = \varphi(x_0)$; $\delta(x^2 - a^2) = (2a)^{-1}[\delta(x - a) + \delta(x + a)]$, $a > 0$;

$$\delta(\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi).$$

Произведение. Пусть $f \in D'(O)$ и $a \in C^\infty(O)$, произведение $af = fa$ определяют равенством

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in D(O).$$

Оказывается, что $af \in D'(O)$ и для обычных ф-ций произведение af совпадает с обычным умножением ф-ций $f(x)$ и $a(x)$. Напр., $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$; $x\mathscr{P}(1/x) = 1$.

Однако эта операция произведения не допускает распространения на любые О. ф. так, чтобы она была ассоциативной и коммутативной. В нек-рых классах О. ф. такое произведение можно определить, однако оно может оказаться неоднозначным.

Дифференцирование. Пусть $f \in D'(O)$. Обобщённую производную О. ф. f

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| \equiv \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ определяют равенством

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha\varphi), \ \ \varphi \in D(O). \qquad (4)$$

Т. к. операция $\varphi \to (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi$ линейна и непрерывна, то функционал $\partial^\alpha\varphi$, определяемый правой частью равенства (4), есть О. ф. из $D'(O)$.

Имеют место след. свойства: операция $f \to \partial^\alpha f$ линейна и непрерывна, любая О. ф. из $D'(O)$ бесконечно дифференцируема (в обобщённом смысле); дифференцирование не зависит от порядка; справедлива ф-ла Лейбница для дифференцирования произведения af, где $a \in \overset{\infty}{C}(O)$; дифференцирование не увеличивает носителя; всякая О. ф. f из $D'(O)$ во всяком открытом множестве $O' \Subset O$ есть нек-рая производная от непрерывной ф-ции в O'; любое дифференц. ур-ние $Lu = f$, $f \in D'(O)$ с пост. коэф. разрешимо в $D'(O)$; любая О. ф. f порядка N с носителем в точке 0 единств. образом представима в виде

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha \delta(x).$$

Напр., $\theta'(x) = \delta(x)$, где θ — ф-ция Хевисайда:

$$\theta(x) = 1, \ x \geq 0; \ \theta(x) = 0, \ x < 0; \ (\delta', \varphi) = -\varphi'(0);$$

ф-ция $-\delta'(x)$ описывает плотность зарядов, соответствующую диполю момента, равного $+1$ в точке $x = 0$ и ориентированного вдоль положительного направления оси x.

Обобщением $\delta'(x)$ является нормальная производная от плотности простого слоя на ориентируемой поверхности S:

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}(\mu\delta_S), \varphi\right) = -\int_S \mu \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS_x.$$

О. ф. $-\partial(\mu\delta_S)/\partial \boldsymbol{n}$ описывает пространств. плотность зарядов, соответствующих распределению диполей на поверхности S с поверхностной плотностью момента μ и ориентированных вдоль заданного направления нормали $\boldsymbol{n}$ на S (*плотность двойного слоя*).

Общее решение ур-ния $xu = 0$ в классе $D'(\mathbb{R}^1)$ есть $u(x) = C\delta(x)$;

$$x^m\delta^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1.$$

Тригонометрич. ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(ikx), \quad |a_k| \leq A(1 + |k|)^m$$

сходится в D', и его можно дифференцировать в D' почленно любое конечное число раз;

$$(2\pi)^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ikx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

Прямое произведение. Пусть $f(x)$ и $g(y)$ — локально интегрируемые ф-ции в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Ф-ция $f(x) \times g(y)$ локально интегрируема в $\mathbb{R}^{n+m}$, она определяет регулярную О. ф.

$$(f(x) \times g(y), \varphi) = \int f(x)\int g(y)\varphi(x, y)dxdy = \\ = (f(x), (g(y), \varphi)), \ \ \varphi(x, y) \in D, \qquad (5)$$

наз. прямым произведением f и g. Ф-ла (5) служит основой для определения прямого произведения О. ф. $f(x)$ из $D'(\mathbb{R}^n)$ и $g(y)$ из $D'(\mathbb{R}^m)$. Прямое произведение