ложения потенциала имеет более компактную форму при разложении $\varphi(R)$ по *сферическим функциям*:

$$\varphi^{(l)} = \frac{1}{R^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Q_m^{(l)} Y_{lm}^*(\theta,\varphi),$$

$$Q_m^{(l)} \sum_i e_i r_i^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta_i, \varphi_i),$$

где Y_{lm}, Y_{lm}^* — сферич. ф-ции, θ, φ и θ_i, φ_i — полярный и азимутальный углы, образуемые векторами $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r}_i$ с осями координат. Приведённая форма разложения отличается от исходного ряда Тейлора только перегруппировкой слагаемых и введением сферич. ф-ций, поэтому совокупность $2l+1$ независимых величин $Q_m^{(l)}$ также наз. 2^l-польным моментом. Если все предыдущие моменты равны нулю, 2^l-польный момент не зависит от выбора начала системы координат.

Полученные соотношения позволяют дать более общее определение М. порядка l как системы зарядов, для к-рой мультипольный момент порядка l отличен от нуля, а все остальные мультипольные моменты равны нулю. Потенциал статич. поля М. порядка l убывает на бесконечности как $R^{-(l+1)}$. Такой характер спадания математически объясняется тем, что потенциал раскладывается в ряд по обратным степеням R, а физически связан с интерференцией полей от отд. зарядов, входящих в М. Кроме этого, М. обладает специфич. угл. зависимостью, определяемой l-й сферич. ф-цией. Характер убывания поля вдали от сложной системы зарядов позволяет заменить её совокупность М. соответствующего порядка (с соответствующими значениями мультипольных моментов).

Вполне аналогично мультипольное разложение можно ввести для статич. магн. полей, создаваемых системой стационарных токов. Для этого необходимо провести разложение *векторного потенциала* магн. поля:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c} \sum_i \frac{e_i \boldsymbol{v}_i}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_i|},$$

$\boldsymbol{v}_i$ — скорость движения i-го заряда. В отличие от случая статич. электрич. полей, разложение потенциала статич. магн. поля начинается с дипольного вклада, т. к. магн. зарядов нет (*магнитные монополи* пока не обнаружены). Для первого члена разложения получим

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \frac{[\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}]}{R^3},$$

где $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c} \sum_i e_i [\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{v}_i]$ — *магнитный момент* системы. След. члены разложения получаются аналогично. Общий член разложения векторного потенциала выражается через шаровые ф-ции.

Для непрерывных ограниченных распределений зарядов (источников и стоков) в приведённых выше ф-лах $\sum_i$ заменяется объёмным интегралом от соответствующей плотности заряда (тока).

Разложение по М. широко используется не только в задачах электро- и магнитостатики, но и в др. областях физики, напр. в акустике и общей теории относительности.

М. применяют также и для исследований полей излучения систем движущихся зарядов (или переменных источников и стоков). Малым параметром, позволяющим описывать поле излучения упрощённым образом, служит отношение размеров области L, в к-рой движутся заряды, к длине излучаемой волны λ ($L \ll \lambda$). Такое поле излучения можно представить как суперпозицию полей М. с переменными во времени мультипольными моментами. В этом случае возникают три физически различных семейства М.— магн. М., определяемые поперечными токами, электрич. М., подразделяющиеся на тороидные [определяемые продольными (радиальными) токами] и зарядовые М., аналогичные обычным эл.-статич. (скалярным) М. (подробнее см. *Мультипольное излучение*).

Лит.: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988; Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, 4 изд., М., 1981.

А. В. Тур, В. В. Яновский.

МУЛЬТИПО́ЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕ́НИЕ — излучение, обусловленное изменением во времени мультипольных моментов системы. Излучение огранич. системы источников представляет собой расходящиеся сферич. волны, так или иначе промодулированные по угл. переменным. Его анализ естеств. образом приводит к разложению излучаемого поля по полному набору *сферических функций*, обладающих определ. угл. зависимостью. При этом сама система источников, описываемых ф-циями координат ($\boldsymbol{r}$) и времени (t), может быть представлена в виде набора вполне определ. конфигураций излучателей — мультиполей. Отд. мультиполи как источники излучения характеризуются только ф-циями времени — мультипольными моментами. Их зависимость от времени связана как с внутр. динамикой системы, так и с перем. внеш. воздействиями. Представление излучаемого системой поля в виде суперпозиции полей отд. мультиполей плодотворно не только в прямых задачах исследования поля излучения сложных источников, но и в обратных задачах восстановления свойств источников по характеристикам их излучения.

В электродинамике излучение волн или, в общем случае, генерация перем. эл.-магн. полей $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \dot{\boldsymbol{A}}/c$ и $\boldsymbol{B} = [\nabla \boldsymbol{A}]$ обусловлены нестационарностью плотности электрич. заряда $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и тока $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$. В вакууме эти поля описываются волновыми ур-ниями

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{A}} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = -4\pi\rho. \qquad (1)$$

Здесь векторный $\boldsymbol{A}$ и скалярный φ потенциалы подчинены условию калибровки Лоренца $\nabla \boldsymbol{A} + \dot{\varphi}/c = 0$ (см. *Градиентная инвариантность*), точка обозначает $\partial/\partial t$, используется *Гаусса система единиц*. *Фурье преобразование* ур-ний (1) по времени [$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\omega)\exp(-i\omega t)$ и т. д.] приводит к неоднородным *Гельмгольца уравнениям*

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, \omega) = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, \omega); \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\varphi(\boldsymbol{r}, \omega) = -4\pi\rho(\boldsymbol{r}, \omega). \qquad (2)$$

Решение ур-ний (2) (при условии излучения — уходящие волны при $r \to \infty$, см. *Зоммерфельда условия излучения*) для фурье-образов потенциалов вне источников, занимающих конечную область пространства в окрестности точки $\boldsymbol{r} = 0$, представляется в виде [без множителя $\exp(-i\omega t)$]:

$$\varphi(\boldsymbol{r}, \omega) = 4\pi i\left(\frac{\omega}{c}\right) \sum_{l,m} p_{lm} h_l\left(\frac{r\omega}{c}\right) Y_{lm}(\boldsymbol{n}), \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\omega) = 4\pi i\left(\frac{\omega}{c^2}\right) \sum_{l,m} [n_{lm}\boldsymbol{N}_{lm}(\boldsymbol{r}) + m_{lm}\boldsymbol{M}_{lm}(\boldsymbol{r}) + c p_{lm}\boldsymbol{L}_{lm}(\boldsymbol{r})]. \qquad (4)$$

Здесь фурье-компоненты скалярных p_{lm}, электрич. n_{lm} и магн. m_{lm} мультипольных моментов определяются след. интегралами по области, занятой источниками:

$$p_{lm} = \int \rho(\boldsymbol{r}, \omega) j_l\left(\frac{r\omega}{c}\right) Y_{lm}^*(\boldsymbol{n}) d^3\boldsymbol{r}, \qquad (5)$$

$$n_{lm} = \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, \omega) \tilde{\boldsymbol{N}}^*(\boldsymbol{r}) d^3\boldsymbol{r}, \qquad (6)$$

$$m_{lm} = \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, \omega) \tilde{\boldsymbol{M}}_{lm}^*(\boldsymbol{r}) d^3\boldsymbol{r}. \qquad (7)$$