С помощью математического ожидания определяют многие важные характеристики случайной величины, напр. *моменты* (в т. ч. *дисперсию*), *характеристическую функцию*.

Лит.: Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., [4 изд.], т. 1—2, М., 1984.

К. А. Боровков.

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ УРАВНЕНИЯ — ур-ния, описывающие матем. модели физ. явлений. Теория этих моделей (математическая физика) занимает промежуточное положение между физикой и математикой. При построении моделей используют физ. законы, однако методы исследования полученных ур-ний являются математическими. В понятие методов математической физики включают те математические методы, к-рые применяют для построения и изучения моделей, описывающих широкие классы физических явлений.

Методы матем. физики начали разрабатываться в трудах И. Ньютона (I. Newton) по созданию основ классич. механики, всемирного тяготения, теории света. Дальнейшее их развитие и применение к изучению матем. моделей разл. физ. явлений связаны с именами Ж. Л. Лагранжа (J. L. Lagrange), Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Фурье (J. Fourier), К. Ф. Гаусса (C. F. Gauß), Б. Римана (B. Riemann), М. В. Остроградского, А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова.

Методы матем. физики применяли для изучения физ. явлений, связанных с разл. полями и волновыми процессами в электродинамике, акустике, теории упругости, гидро- и аэродинамике, теории тепла и диффузии и ряде др. исследований физ. явлений в сплошных средах. Матем. модели этих явлений обычно описывают при помощи дифференц. ур-ний с частными производными, получивших название М. ф. у.

Помимо дифференц. ур-ний при описании матем. моделей физики применяют интегральные и интегро-дифференц. ур-ния, вариационные и теоретико-вероятностные методы, теорию потенциала, методы теории аналитич. ф-ций и др. разделы математики. Особое значение для исследования матем. моделей физики приобретают прямые численные методы, использующие ЭВМ, что позволило эффективно решать сложные задачи газовой динамики, теории переноса, физики плазмы.

Теоретич. исследования в области квантовой физики потребовали расширения используемых матем. методов. Стали применять теорию операторов, теорию обобщённых ф-ций, топологич. и алгебраич. методы. Интенсивное взаимодействие теоретич. физики, математики и использования ЭВМ в науч. исследованиях привело к расширению тематики, созданию новых классов моделей.

Постановка задач матем. физики заключается в построении матем. моделей, описывающих осн. закономерности изучаемого класса физ. явлений. Такая постановка состоит в выводе ур-ний (дифференц., интегральных, интегро-дифференц. или алгебраических), к-рым удовлетворяют величины, характеризующие физ. процесс. При этом исходят из осн. физ. законов, учитывающих только наиб. существ. черты явления, отвлекаясь от второстепенных характеристик. Такими законами являются обычно законы сохранения, напр., кол-ва движения, энергии, числа частиц и т. д. Поэтому для описания процессов разл. физ. природы, но имеющих общие характерные черты, применимы одни и те же матем. модели.

Краевые задачи. Для полного описания эволюции физ. процесса помимо ур-ний необходимо, во-первых, задать картину процесса в нек-рый фиксиров. момент времени (начальные условия) и, во-вторых, задать режим на границе той среды, где протекает этот процесс (граничные условия). Начальные и граничные условия образуют краевые условия, а дифференц. ур-ния вместе с соответствующими краевыми условиями — краевую задачу матем. физики. Большинство М. ф. у. — линейные дифференц. ур-ния с частными производными 2-го порядка:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \operatorname{grad} u) = 0,$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n),$$

с кусочно-непрерывными коэф. $a_{ij}(x)$. Заменой переменных квадратичную форму $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) p_i p_j$ можно привести к канонич. виду $\sum\limits_{l=1}^{r} q_l^2 - \sum\limits_{l=r+1}^{m} q_l^2$, $m \leqslant n$, причём числа r и m не зависят от преобразования. Если $m = n$ и все слагаемые одного знака ($r = 0$ или $r = m$), то ур-ние относится к эллиптическому типу. Если $m = n$, но имеются слагаемые разных знаков, исследуемое ур-ние — гиперболического типа. При $m < n$ — ур-ние параболического типа. Эта классификация, вообще говоря, зависит от точки x. Ниже приведены нек-рые примеры ур-ний и соответствующих краевых задач.

Ур-ние

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(x, t) \qquad (1)$$

описывает малые колебания струн, стержней, мембран, акустич. и эл.-магн. колебания. В ур-нии (1) пространственные переменные $x = (x_1, \ldots, x_n)$ изменяются в области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, где развивается рассматриваемый физ. процесс; при этом должно быть $\rho > 0$, $p > 0$ и $q \geqslant 0$. При этих условиях ур-ние (1) — ур-ние гиперболич. типа. При $\rho = 1$, $p = a^2 = \text{const}$ и $q = 0$ ур-ние (1) превращается в *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x, t), \qquad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Диффузии уравнение

$$\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(x, t) \qquad (3)$$

описывает процессы диффузии частиц и распространения тепла в среде. Ур-ние (3) — ур-ние параболич. типа. При $\rho = 1$, $p = a^2 = \text{const}$ и $q = 0$ ур-ние (3) превращается в уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, t). \qquad (4)$$

Для стационарных процессов, когда отсутствует зависимость от времени t, ур-ния (1) и (3) принимают вид

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f(x). \qquad (5)$$

Ур-ние (5) — ур-ние эллиптич. типа. При $p = 1$ и $q = 0$ ур-ние (5) наз. ур-нием Пуассона

$$\Delta u = -f(x), \qquad (6)$$

а при $f = 0$ — *Лапласа уравнением*

$$\Delta u = 0. \qquad (7)$$

Ур-ниям (6) и (7) удовлетворяют разл. потенциалы: ньютонов (кулонов) потенциал, потенциал течения несжимаемой жидкости и т. д.

Если в волновом ур-нии (2) внеш. возмущение f — периодическое с частотой ω, $f(x,t) = a^2 f(x) \exp(i\omega t)$, то амплитуда $u(x)$ периодич. решения с той же частотой ω

$$u(x, t) = u(x) \exp(i\omega t)$$

удовлетворяет *Гельмгольца уравнению*

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}. \qquad (8)$$

К ур-нию Гельмгольца приводят задачи дифракции.