на $\exp i(\omega t - \mathbf{kr})$ ($\mathbf{k}$ — волновой вектор), то для фурье-компонентов полей ($\boldsymbol{E}_\omega$, $\mathbf{k}$ и т. д.) получим систему алгебраич. ур-ний:

$$[i\mathbf{k}\boldsymbol{H}_{\omega,k}] - \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{D}_{\omega,k} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\omega,k}, \qquad (1в)$$

$$[i\mathbf{k}\boldsymbol{E}_{\omega,k}] + \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}_{\omega,k} = 0, \qquad (2в)$$

$$(i\mathbf{k}\boldsymbol{B}_{\omega,k}) = 0, \qquad (3в)$$

$$(i\mathbf{k}\boldsymbol{D}_{\omega,k}) = 4\pi\rho_{\omega,k}. \qquad (4в)$$

Такое сведение М. у. к набору ур-ний для осцилляторов (осцилляторов поля) составляет важный этап перехода к квантовой электродинамике, где эл.-магн. поле рассматривается как совокупность фотонов, характеризуемых энергиями $\hbar\omega$ и импульсами $\hbar\boldsymbol{k}$, $|\boldsymbol{k}| = \omega/c$. Однако и в макроэлектродинамике представления (1в)—(4в) оказываются иногда вполне адекватными физ. сущности процессов: напр., при выделении откликов высокодобротных систем (см. *Объёмный резонатор*) или при изучении «механизма формирования» мод со сложной пространственной структурой из набора плоских волн и т. п. Наконец, М. у. в форме (1в) — (4в) удобны для описания свойств эл.-динамич. систем, обладающих не только временно́й, но и пространственной дисперсией, если последняя задаётся в виде зависимости параметров от волнового вектора $\mathbf{k}$.

7. Материальные уравнения

В макроэлектродинамике материальные связи, характеризующие эл.-магн. свойства сред, вводятся феноменологически; они находятся либо непосредственно из эксперимента, либо на основании модельных представлений. Существуют два способа описания: в одном векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ считаются исходными и материальные ур-ния задаются в виде $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})$ и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})$, в другом — за исходные берутся векторы 2-го «блока» $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, и соответствующие материальные связи представляются иначе: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$. Оба описания совпадают для вакуума, где материальные уравнения вырождаются в равенства $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$.

Рассмотрим простейшую модель среды, характеризуемую мгновенным, локальным поляризац. откликом на появляющиеся в ней поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Под действием поля $\boldsymbol{E}$ в такой среде возникает электрич. поляризация $\boldsymbol{P}^e(\boldsymbol{E})$ (см. *Поляризации вектор*), а под действием поля $\boldsymbol{H}$ — магн. поляризация $\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{H})$. Чаще её наз. *намагниченностью* и обозначают $\boldsymbol{M}$.

Материальные ур-ния для таких сред имеют вид

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}^e(\boldsymbol{E}), \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}(\boldsymbol{H}). \qquad (7)$$

При этом индуцированные в среде электрич. заряды наз. связанными или поляризац. зарядами с плотностью $\rho^e_{\text{св}}$, а токи, обусловленные их изменениями,— поляризац. токами с плотностью $\boldsymbol{j}^e_{\text{св}}$:

$$\rho^e_{\text{св}} = -\nabla\boldsymbol{P}^e(\boldsymbol{E}),$$

$$\boldsymbol{j}^e_{\text{св}} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P}^e(\boldsymbol{E}), \qquad (8)$$

$$\nabla\boldsymbol{j}^e_{\text{св}} + \frac{\partial}{\partial t}\rho^e_{\text{св}} = 0.$$

Эти понятия были перенесены и на магн. поля, что можно выразить в виде системы ур-ний, аналогичной (8):

$$\rho^m_{\text{св}} = -\nabla\boldsymbol{M}(\boldsymbol{H}),$$

$$\boldsymbol{j}^m_{\text{св}} = \frac{\partial M(H)}{\partial t},$$

$$\nabla\boldsymbol{j}^m_{\text{св}} + \frac{\partial}{\partial t}\rho^m_{\text{св}} = 0,$$

и только потом выяснилось, что истинными источниками намагничивания среды оказались электрич. токи $\boldsymbol{j}^e_{\text{св}} = c[\nabla\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B})]$, а не магн. заряды. Поэтому терминология сложилась на основе физически некорректной системы

$$[\nabla\boldsymbol{H}] = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^e + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},$$

$$\nabla\boldsymbol{H} = 4\pi\rho^m_{\text{св}}(\boldsymbol{H}),$$

тогда как следовало бы принять беззарядовые ур-ния

$$[\nabla\boldsymbol{B}] = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^e + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^e_{\text{св}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}, \qquad (9)$$

$$\nabla\boldsymbol{B} = 0,$$

что равносильно замыканию исходных М. у. (1) — (4) с помощью материальных связей

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B}). \qquad (7а)$$

Из (6) и (7а) следует, что 2-й вариант представления материальных соотношений, в к-ром постулируются в качестве исходных векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, физически предпочтительнее.

В модели Лоренца — Максвелла усреднение микрополя $\boldsymbol{H}_{\text{микро}}$, произведённое с учётом вклада со стороны индуциров. полей, приводит к ур-ниям (9) и соответственно $\langle\boldsymbol{H}_{\text{микро}}\rangle = \boldsymbol{B}$. Однако обычно параметры сред вводятся с помощью ур-ний (7), что облегчает двойственную симметризацию ф-л (подробнее см. в разделе 9). Напр., скалярные восприимчивости сред (χ^e, χ^m) определяются соотношениями

$$\boldsymbol{P}^e = \chi^e\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{P}^m = \chi^m\boldsymbol{H}$$

и позволяют ввести *диэлектрическую проницаемость* ε и *магнитную проницаемость* μ:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\chi^e, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi^m. \qquad (10)$$

Простейшие модели сред характеризуются пост. значениями ε и μ. В случае вакуума $\varepsilon = \mu = 1$, $\chi^e = \mu^m = 0$. Классификация разл. сред обычно основывается на материальных ур-ниях типа (10) и их обобщениях. Если проницаемости ε и μ не зависят от полей, то М. у. (1) — (4) вместе с материальными ур-ниями (10) остаются линейными, поэтому о таких средах говорят как о л и н е й н ы х с р е д а х. При наличии зависимостей $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$, $\mu = \mu(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ среды наз. н е л и н е й н ы м и: решения М. у. в *нелинейных средах* не удовлетворяют принципу суперпозиции. Если проницаемости зависят от координат $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{r})$, $\mu = \mu(\boldsymbol{r})$, то говорят о н е о д н о р о д н ы х с р е д а х, при зависимости от времени $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $\mu = \mu(t)$ — о н е с т а ц и о н а р н ы х с р е д а х (иногда такие эл.-динамич. системы наз. п а р а м е т р и ч е с к и м и). Для *анизотропных сред* скаляры ε, μ в (10) заменяются на *тензоры*: $D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta$, $B_\alpha = \mu_{\alpha\beta}H_\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ (по дважды встречающимся индексам производится суммирование). Важное значение имеют также эффекты запаздывания и нелокальности отклика среды на внеш. поля. Значение индуциров. поляризации $\boldsymbol{P}^e$, напр. в момент t, может определяться, вообще говоря, значениями полей во все предыдущие моменты времени, т. е.

$$\boldsymbol{P}^e = \int_{-\infty}^{t}\chi^e(t-t')\boldsymbol{E}(t')dt',$$

что при преобразовании Фурье по времени приводит к зависимости $\varepsilon(\omega)$ [соответственно $\mu(\omega)$]. Такие среды наз. средами с временно́й (частотной) дисперсией или просто *диспергирующими средами*. Аналогичная связь устанавливается и для нелокальных взаимодействий, когда отклик в точке $\boldsymbol{r}$ зависит от значения полей,