

М., 1936; Беккер Р., Электронная теория, пер. с нем., Л.—М., 1936; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988. М. А. Миллер, Е. В. Суворов. ЛОРЕНЦА СИСТЕМА — система трёх нелинейных дифференц. ур-ний первого порядка:

$$\dot{x} = Pr(y-x), \quad \dot{y} = -y + rx - xz, \quad \dot{z} = xy - bz,$$

решения к-рой в широкой области параметров являются нерегулярными ф-циями времени и по мн. своим характеристикам неотличимы от случайных. Л. с. была получена Э. Лоренцем (Е. Lorenz) из ур-ний гидроди-

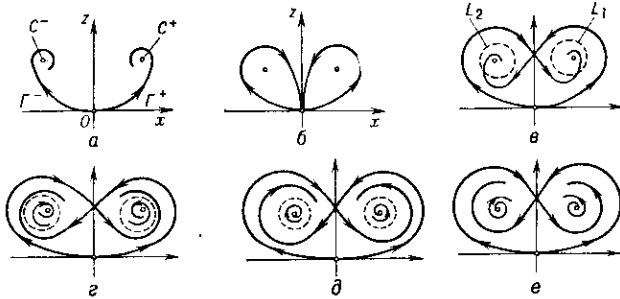
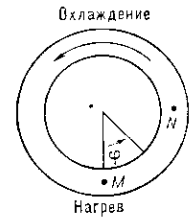


Рис. 1. Иллюстрация последовательных бифуркаций в системе Лоренца при увеличении параметра r: а)  $1 < r < r_1$ ; б)  $r = r_1$ ; в)  $r_1 < r < r_2$ ; г)  $r = r_2$ ; д)  $r_2 < r < r^*$ ; е)  $r^* < r$ .

намики как модель для описания тепловой конвекции в горизонтальном слое жидкости, подогреваемой снизу ( $Pr$  — Прандтля число,  $r = Ra/Pr$  — приведённое Рэлея число,  $b$  — определяется выбором моды в Фурье-разложении поля скорости и темп-ры).

Л. с. — один из примеров динамической системы, имеющей простой физ. смысл; она демонстрирует стохастич. поведение системы. В фазовом пространстве этой системы в области параметров, указанных на рис. 1, существует странный аттрактор, движение изображающей точки на к-ром соответствует «случайному» — турбулентному течению жидкости при тепловой конвекции.



Л. с. (при  $b=1$ ) описывает, в частности, движение жидкости в конвективной петле, расположенной в вер-

Рис. 2. Конвективная петля — физическая модель, для которой выводятся уравнения Лоренца.

тикальной плоскости в однородном поле тяжести горизонтальной полости, заполненной жидкостью (рис. 2). На стенках полости поддерживается не зависящая от времени (но зависящая от угла  $\phi$ ) темп-ра  $T(\phi)$ ; ниж. часть петли теплее верхней. Ур-ния движения жидкости в конвективной петле сводятся к Л. с., где  $x(t)$  — скорость движения жидкости,  $y(t)$  — темп-ра в точке  $N$ , а  $z(t)$  — темп-ра в точке  $M$  при больших  $t$ . С ростом  $r$  характер движения жидкости меняется: сначала (при  $r < 1$ ) жидкость неподвижна, далее (при  $1 < r < r_2$ ) устанавливается циркуляция с пост. скоростью (либо по часовой стрелке, либо против); при ещё больших  $r$  всё течение становится чувствительным к малым изменениям нач. условий, скорость циркуляции жидкости меняется уже нерегулярно: жидкость вращается иногда по часовой стрелке, иногда — против.

При обычно используемых значениях  $Pr=10$ ,  $b = 8/3$  Л. с. обладает след. свойствами: ур-ния Л. с. инвариантны относительно преобразования  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow z$ ; фазовый объём сокращается с пост. скоростью

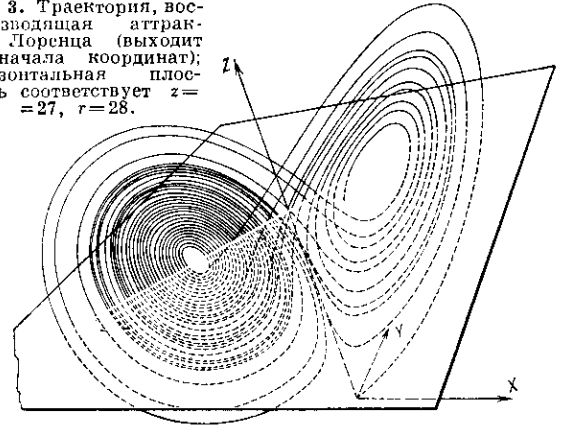
$$\Lambda = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(Pr + b + 1) \approx -13,7,$$

за единицу времени объём сокращается в  $e^{-\Lambda} \approx 10^6$  раз. С ростом  $r$  в Л. с. происходят след. осн. бифуркации.

1) При  $0 < r < 1$  единственным состоянием равновесия

является устойчивый узел в начале координат  $O(0, 0, 0)$ . 2) При  $1 < r < r_1$ , где  $r_1 = 13,92$ , Л. с. кроме упомянутого тривиального ( $O$ ) имеет ещё два состояния равновесия  $C^+$ ,  $C^-$ . Состояние равновесия  $O$  является седлом, имеющим двумерное устойчивое многообразие и одномерное неустойчивое, состоящее из  $O$  и двух сепаратрис  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ , стремящихся к  $C^+$  и  $C^-$  (рис. 1, а). 3) При  $r = r_1$  каждая из сепаратрис становится двоякоасимптотической к седлу  $O$  (рис. 1, б). При переходе  $r$  через  $r_1$  из замкнутых петель сепаратрис рождаются неустойчивые (седловые) периодич. движения — предельные циклы  $L_1$  и  $L_2$ . Вместе с этими неустойчивыми циклами рождается и очень сложно организованное предельное множество; оно, однако, не является притягивающим (аттрактором), и при  $r_1 < r < r_2$  (рис. 1, в), где  $r_2 = 24,06$ , все траектории по-прежнему стремятся к  $C^\pm$ . Эта ситуация отличается от предшествующей тем, что теперь сепаратрисы  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  идут к «своим» состояниям равновесия  $C^+$  и  $C^-$  соответственно. 4) При  $r_2 < r < r^*$ , где  $r^* = 24,74$ , в Л. с. наряду с устойчивыми состояниями равновесия  $C^\pm$  существует ещё притягивающее множество, характеризующееся сложным поведением траекторий, — аттрактор Лоренца (рис. 1, д и рис. 3). 5) При  $r \rightarrow r^*$  седловые циклы  $L_1$  и  $L_2$  стягиваются к состояниям равновесия  $C^+$  и  $C^-$ , к-рые при  $r = r^*$  теряют устойчивость, и при  $r > r^*$  единственным притягивающим мно-

Рис. 3. Траектория, воспроизводящая аттрактор Лоренца (выходит из начала координат); горизонтальная плоскость соответствует  $z = 27$ ,  $r = 28$ .



жеством Л. с. является аттрактор Лоренца. Т. о., если стремить  $r$  к  $r^*$  со стороны меньших значений, то стохастичность в Л. с. возникает сразу, скачком, т. е. имеет место жёсткое возникновение стохастичности.

К Л. с. сводятся не только ур-ния, описывающие конвективные движения жидкости, но и др. физ. модели (трёхуровневый лазер, дисковое динамо и т. д.).

Лит.: Lorenz E., Deterministic nonperiodic flow, «J. Atmos. Sci.», 1963, v. 20, p. 130; в рус. пер., в кн.: Странные аттракторы, М., 1981, с. 88; Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Хаотическая динамика простых систем, «Природа», 1981, № 2, с. 54; Афраймович Е. С., Быков В. В., Шильников Л. П., О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца, «Тр. Московского матем. общества», 1982, т. 44, с. 150; Рабинович М. И., Трубецков Д. И., Введение в теорию колебаний и волн, М., 1984. В. Г. Шехов.

ЛОРЕНЦА — ДИРАКА УРАВНЕНИЕ — релятивистское ур-ние движения классич. точечной заряж. частицы в эл.-магн. поле, учитывающее силу реакции, с к-рой действует на частицу её собств. поле излучения. Эта сила реакции исследовалась до возникновения теории относительности Х. А. Лоренцем (1892), релятивистски инвариантное рассмотрение вопроса проведено П. А. М. Дираком (P. A. M. Dirac, 1938). Л.—Д. у. имеет вид (в СГС)

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{q}{c} F^{ik} u_k + \frac{2q^2}{3c} \left( \frac{d^2 u^i}{ds^2} - u^i u^k \frac{d^2 u_k}{ds^2} \right), \quad (1)$$