алгебре определяются естеств. образом, т. е. с помощью операций, совершённых над любыми представителями классов, напр. $[X+B,\ Y+B]=[X,\ Y]+B$.

Любая Л. а. содержит тривиальные (несобственные) идеалы. Один из них совпадает со всей Л. а., второй состоит лишь из нулевого элемента. Если Л. а. не содержит идеалов, отличных от этих (т. е. не содержит собств. идеалов), то она наз. простой. Алгебра наз. полупростой, если она не имеет нетривиальных коммутативных идеалов (т. е. таких, в к-рых все коммутаторы обращаются в нуль). Всякая полупростая Л. а. представляется в виде прямой суммы простых Л. а.

Л. а. $A$ наз. разрешимой, если в ней существует такая цепочка подалгебр $A=A_0\supset A_1\supset\ldots\supset A_k=\{0\}$, что $A_{i+1}$ — идеал в $A_i$ и фактор-алгебра $A_i/A_{i+1}$ коммутативна. Если, кроме того, все $A_i$ — идеалы в $A$ и фактор-алгебра $A_i/A_{i+1}$ принадлежит центру фактор-алгебры $A/A_{i+1}$, то алгебра $A$ наз. нильпотентной.

На Л. а. можно ввести внутр. произведение, определив его равенством $(X,\ Y)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}X\cdot\mathrm{ad}Y)$, где Tr означает след оператора (матрицы). Эта симметричная (относительно перестановки аргументов) билинейная форма наз. формой Киллинга. Если воспользоваться матричной реализацией присоединённого представления, можно выразить форму Киллинга через коэф. $x^i$, $y^i$ разложения элементов $X$, $Y$ по базису. Получим $(X,\ Y)=\sum\limits_{i,\,j} g_{ij}x^iy^j$, где симметричный тензор $g_{ij}=\sum\limits_{k,\,l} C_{il}^{k}\ C_{jk}^{l}$ наз. метрическим тензором Картана алгебры $A$. Для нек-рых Л. а. метрич. тензор и форма Киллинга могут быть вырождены, т. е. $\det\|g_{ij}\|=0$ (это имеет место, напр., для коммутативных Л. а.). Форма Киллинга невырождена только для полупростой Л. а. (критерий Картана).

Для комплексных простых Л. а. всегда можно выбрать базисные элементы $X_i$ таким образом, чтобы структурные константы $C_{ij}^{k}$ были чисто мнимыми и антисимметричными по всем парам индексов. Такой набор наз. базисом Картана. При этом ранг алгебры Ли $l$ определяется как макс. число коммутирующих элементов в базисе Картана, $l$-мерная коммутативная подалгебра, натянутая на это множество элементов, наз. подалгеброй Картана.

**Классификация алгебр Ли.** Имеется четыре серии простых комплексных Л. а. конечной размерности: $A_l$, $B_l$, $C_l$, $D_l$ и кроме этого пять исключительных алгебр $G_2$, $F_4$, $E_6$, $E_7$, $E_8$ (индексы везде обозначают ранг алгебры). Каждая комплексная Л. а. имеет единственную вещественную подалгебру, являющуюся Л. а. компактной группы Ли. Перечислим компактные группы, соответствующие сериям. Алгебра $A_l$, $l=1,\ 2,\ \ldots$, имеет размерность $n=(l+1)^2-1$ и связана с группой $SU(l+1)$ унитарных унимодулярных (т. е. имеющих единичный детерминант) $(l+1)$-рядных матриц. Алгебра $B_l$, $l=2,\ 3,\ \ldots$, имеет размерность $n=l(2l+1)$ и связана с группой $SO(2l+1)$ ортогональных унимодулярных матриц порядка $2l+1$. Случай $l=1$ исключается, т. к. $B_1=A_1$. Алгебра $C_l$, $l=3,\ 4,\ \ldots$, имеет размерность $n=l(2l+1)$ и связана с *симплектической группой* $Sp(2l)$ (т. е. группой преобразований, сохраняющих невырожденную антисимметричную билинейную форму в пространстве размерности $2l$). При $l=1$ и 2 имеет место совпадение $C_l=B_l$. Алгебра $D_l$, $l=4,\ 5,\ \ldots$, имеет размерность $n=2l^2-l$ и связана с группой $SO(2l)$. Низшие размерности исключаются, т. к. $D_3=A_3$, а $D_1$ и $D_2$ не являются простыми. Группы $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$, порождаемые бесконечными сериями Л. а., наз. классическими группами.

Каждая комплексная простая Л. а. имеет неск. вещественных форм (т. е. таких вещественных Л. а., из к-рых данная Л. а. получается комплексификацией). Лишь одна из них соответствует компактной группе Ли. Остальные приводят к некомпактным группам. Напр., среди вещественных форм комплексной алгебры $A_l$ есть такие, к-рые соответствуют группам $SU(p,\ q)$, $p+q=l+1$, псевдоунитарных матриц, т. е. преобразований в комплексном $(l+1)$-мерном пространстве, сохраняющих форму $|z_1|^2+\ldots+|z_p|^2-|z_{p+1}|^2-\ldots-|z_{l+1}|^2$. Вещественные формы алгебры $B_l$ порождают группы псевдовращений или псевдоортогональных преобразований $SO(p,\ q)$, $p+q=2l+1$. Это преобразования обобщённого пространства Минковского с $p$ пространственными и $q$ временными измерениями. Вещественные формы в $C_l$ порождают группы $Sp(2p,\ 2q)$, $p+q=l$. Такую группу можно определить как подгруппу в группе $SU(2p,\ 2q)$, оставляющую инвариантной антисимметричную билинейную форму. Ещё одна вещественная форма в $C_l$ состоит из антиэрмитовых матриц и порождает группу $Sp^*(2l)$. Вещественные формы в $D_l$ порождают группы псевдовращений $SO(p,\ q)$, $p+q=2l$.

Кроме перечисленных, имеются нек-рые специальные вещественные формы комплексных алгебр $A_l$ и $D_l$. Приведённый список неполон с точки зрения классификации простых групп. Не каждая простая вещественная группа Ли является вещественной формой простой комплексной группы. Так, алгебра $D_2$ не проста, и не проста соответствующая ей компактная подгруппа $SO(4)$. Однако некомпактная группа $SO(1,\ 3)$ (*Лоренца группа*) является простой. Её Л. а. изоморфна $sl(2,\ \mathbb{C})$. Обобщением этого примера является целый класс простых вещественных Л. а.— это комплексные Л. а., рассматриваемые как вещественные.

*Лит.:* Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, 2 изд., М., 1986.

*А. А. Кириллов, М. Б. Менский.*

**ЛИ ГРУ́ППА** — см. *Группа*.

**ЛИБРО́Н** — квазичастица, соответствующая элементарному возбуждению ориентационных (либрационных) колебаний молекулярного кристалла, сопровождающихся отклонением осей молекул от равновесной ориентации (частный случай оптич. фонона). Л. подчиняется статистике Бозе — Эйнштейна. Л. взаимодействуют друг с другом, с др. квазичастицами и с эл.-магн. полем. Л. вносят существ. вклад в термодинамич. и кинетич. свойства молекулярных кристаллов типа $N_2$, $O_2$, $CO_2$.

*А. М. Косевич.*

**ЛИНЕ́ЙНОЕ ВЗАИМОДЕ́ЙСТВИЕ ВОЛН** — явление перераспределения волнового движения между различными *нормальными волнами*, происходящее в результате изменения свойств среды в пространстве и(или) во времени под действием внеш. факторов. Это явление наз. также линейной трансформацией волн. Оно не связано с нарушением принципа суперпозиции волновых полей, в отличие от нелинейного взаимодействия волн, при к-ром пространственно-временно́е изменение свойств среды обусловлено самими взаимодействующими волнами.

Понятие «Л. в. в.» удобно рассмотреть на примере линейного взаимодействия колебаний. Напр., для системы связанных осцилляторов

$$d^2x_i/dt^2+\omega_i^2x_i=\sum_{j=1}^{M}\alpha_{ij}x_j$$

с изменяющимися на нек-ром интервале времени $t_1<t<t_2$ коэф. связи $\alpha_{ij}$ и частотами $\omega_i$ явление линейного взаимодействия $2M$ мод с собств. частотами $\Omega_l(t)$ заключается в том, что амплитуды их колебаний, взаимно независимых при $t<t_1$, при $t>t_2$ становятся взаимно зависимыми. Взаимная трансформация