Ур-ния в форме (6) обычно и наз. в физике ур-ниями Лагранжа. Преимущество этих ур-ний состоит в том, что они позволяют изучить движение механич. системы, зная для неё одну только ф-цию L, полностью характеризующую систему. Такая форма ур-ний имеет место не только для консервативных систем. Если обобщённые силы можно представить через нек-рый «обобщённый потенциал» $U(q_i, \dot{q}_i)$ в виде

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right),$$

то ур-ния (3) представляются тоже в виде (6), где $L = T + U$. Напр., для заряж. частицы массы m с зарядом q, движущейся в эл.-магн. поле, к-рое характеризуется векторным A и скалярным φ потенциалами, существует «обобщённый потенциал»

$$U = \frac{q}{c}\boldsymbol{Av} - q\varphi \quad \text{и} \quad L = \frac{mv^2}{2} - q\varphi + \frac{q}{c}\boldsymbol{Av},$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость частицы, c — скорость света.

Область приложения ур-ний (6) оказывается ещё более широкой благодаря их связи с *наименьшего действия принципом*. Согласно этому принципу, для истинного движения системы величина $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, наз. *действием*, имеет экстремум, условие существования к-рого состоит в том, что ф-ция L должна удовлетворять ур-ниям Эйлера, совпадающим с ур-ниями (6). Отсюда следует, что ур-ния вида (6) справедливы для любой физ. системы (непрерывная среда, гравитац. или эл.-магн. поле и др.), к-рая характеризуется соответствующей ф-цией Лагранжа и подчиняется вариационному принципу, аналогичному принципу наим. действия.

Для среды или поля, представляющих собой систему с бесконечным числом степеней свободы, роль обобщённых координат q_i играют такие величины, как смещение частицы, плотность, потенциал и т. п., зависящие в общем случае от координат x, y, z точек среды (поля) и от времени; поэтому для такой среды (поля) $q_i = q_i(x, y, z, t)$. Характеристикой системы в этих случаях служит удельная (отнесённая к единице объёма) ф-ция Лагранжа, или *лагранжиан*

$$L_0\left(q_i, \frac{\partial q_i}{\partial t}, \frac{\partial q_i}{\partial x}, \frac{\partial q_i}{\partial y}, \frac{\partial q_i}{\partial z}, x, y, z, t\right),$$

и Л. у. для среды (поля) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L_0}{\partial\left(\frac{\partial q_i}{\partial t}\right)}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial L_0}{\partial\left(\frac{\partial q_i}{\partial x}\right)}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial L_0}{\partial\left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial L_0}{\partial\left(\frac{\partial q_i}{\partial z}\right)}\right] - \frac{\partial L_0}{\partial q_i} = 0. \qquad (7)$$

Ур-ния (7), в отличие от (3) или (6), представляют собой систему ур-ний в частных производных; число их равно числу величин q_i.

Примером приложения ур-ний (7) к упруго деформируемой среде может служить задача о продольных вдоль оси x колебаниях призматич. стержня. В этом случае имеется одна обобщённая координата $q_1 = u(x, t)$, где u — продольное смещение частиц стержня, и ф-ция L_0, составляемая как разность удельных кинетической и потенциальной энергий, имеет вид

$$L_0 = \frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right],$$

где ρ — плотность среды, E — модуль упругости при растяжении. Подстановка этого значения L_0 в (7) даёт ур-ние продольных упругих колебаний:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Др. примером может служить эл.-магн. поле в вакууме, для к-рого в качестве четырёх обобщённых координат можно принять компоненты A_x, A_y, A_z векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ и скалярный потенциал φ. В этом случае

$$L_0 = \frac{E^2 - B^2}{8\pi} - \rho\varphi + \frac{1}{c}\boldsymbol{jA},$$

где E — напряжённость электрич. поля, B — магн. индукция, $\boldsymbol{j}$ — плотность тока, ρ — уд. заряд. При этом значении L_0 равенства (7) дают ур-ния Максвелла.

Л. у. в виде (6) сохраняют смысл и при движениях со скоростями, сравнимыми со скоростью света, но при этом в выражение ф-ции L вместо кинетич. энергии частицы входит величина $-mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$. См. также *Лагранжев формализм*.

Лит.: 1) Лагранж Ж., Аналитическая механика, пер. с франц., 2 изд., т. 1—2, М.— Л., 1950; 2) Жуковский Н. Е., Теоретическая механика, 2 изд., М.— Л., 1952; 3) Суслов Г. К., Теоретическая механика, 3 изд., М.— Л., 1946; 4) Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., Курс теоретической механики, 6 изд., т. 2, М., 1983; 5) Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, 4 изд., М., 1988, гл. 1; 6) Голдстейн Г., Классическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1975, гл. 1, 2, 11.

С. М. Тарг.

ЛАГРА́НЖА ФУ́НКЦИЯ (кинетический потенциал) — характеристич. функция $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ механич. системы, выраженная через обобщённые координаты q_i, обобщённые скорости $\dot{q}_i$ и время t. В простейшем случае *консервативной системы* Л. ф. равна разности между кинетической T и потенциальной Π энергиями системы, выраженными через q_i и $\dot{q}_i$, т. е. $L = T(q_i, \dot{q}_i, t) - \Pi(q_i)$. Зная Л. ф., можно с помощью *наименьшего действия принципа* составить дифференциальные ур-ния движения механич. системы. Понятие о Л. ф. распространяется и на др. физ. системы (см. *Лагранжиан*, *Лагранжа уравнения* механики 2-го рода, *Лагранжев формализм*).

ЛАГРА́НЖА — ДИРИХЛЕ́ ТЕОРЕ́МА — устанавливает достаточное условие устойчивости равновесия консервативной механич. системы. Согласно Л.— Д. т., консервативная механич. система находится в положении устойчивого равновесия, если потенц. энергия системы в этом положении имеет строгий минимум. В частности, из Л.— Д. т. следует, что положение равновесия механич. системы в однородном поле тяжести будет устойчивым, когда центр тяжести системы занимает наинизшее положение.

ЛАГРА́НЖЕВ ФОРМАЛИ́ЗМ — основанная на вариационном принципе формулировка механики и теории поля, в к-рой состояние системы задаётся обобщёнными координатами q_i и их производными по времени — обобщёнными скоростями $\dot{q}_i$ (см. *Вариационные принципы механики*). Исходным для Л. ф. являются фундам. понятия *действия* S и его полной производной по времени, взятой вдоль траектории системы,— *Лагранжа функции* $L(t)$; при этом $S = \int_{t_1}^{t_2} L(t)\, dt$. Для механич. системы с конечным числом степеней свободы (напр., для системы материальных точек) обычно принимают, что ф-ция Лагранжа зависит от q_i и $\dot{q}_i$:

$$L(t) = L[q(t), \dot{q}(t), t]$$

(где q, $\dot{q}$ — совокупность q_i, $\dot{q}_i$). Существуют и обобщения Л. ф. на случаи, когда L зависит от высших производных q_i. Для систем с бесконечным числом степеней свободы — физ. полей — роль обобщённых координат играют значения компонент поля $\varphi^a(\boldsymbol{x})$ во всех пространств. точках $\boldsymbol{x}$. Зависимость L от всех $\varphi^a(\boldsymbol{x})$ означает, что L является функционалом. Для физики наиб. интересны локальные функционалы, для к-рых вторая вариац. производная $\delta^2 L/\delta\varphi^a(\boldsymbol{x})\delta\varphi^b(\boldsymbol{x}')$ отлична от нуля лишь при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$. Тогда ф-ция Лагранжа может быть представлена в виде $L(t) = \int \mathscr{L}(x, t)\, dx$,