3) С К.—Г. к. тесно связаны $3j$-символы Вигнера:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2-m}(2j+1)^{-1/2}C^{j,\,-m}_{j_1m_1;\,j_2m_2}, \quad (5)$$

к-рые обладают более простыми свойствами симметрии. Напр.,

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & j_1 & j_2 \\ m & m_1 & m_2 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j \\ m_2 & m_1 & m \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ -m_1 & -m_2 & -m \end{pmatrix} = \ldots, \quad (*)$$

где $\sigma = (-1)^{j_1+j_2+j}$. Имеются также нетривиальные симметрии $3j$-символов, отличные от (*) и установленные Редже (см. [6]). $3j$-символы представляют собой амплитуду вероятности того, что три угл. момента j_1, j_2 и j складываются в полный угл. момент, равный нулю. С этим и связана их высокая симметрия. Табл. $3j$-символов см., напр., в [2, 7].

Обобщением $3j$-символов являются т. н. $3nj$-символы, к-рые появляются при рассмотрении разл. схем сложения $(n+1)$ угл. моментов.

4) К.—Г. к. возникают в разложении произведения двух D-ф-ций Вигнера, описывающих преобразование волновой ф-ции частицы с угл. моментом j при вращениях системы отсчёта:

$$D^{j_1}_{m_1'm_1}(g)\,D^{j_2}_{m_2'm_2}(g) =$$

$$= \sum_j C^{j,\,m_1'+m_2'}_{j_1m_1';\,j_2m_2'}\,C^{j,\,m_1+m_2}_{j_1m_1;\,j_2m_2}\,D^{j}_{m_1+m_2',\,m_1+m_2}(g). \quad (6)$$

Здесь g — произвольный элемент *вращений группы* $SO(3)$, определяемый, напр., тремя углами Эйлера; связь между исходной волновой ф-цией ψ и волновой ф-цией $\tilde{\psi}$ в повёрнутой системе отсчёта имеет вид

$$\tilde{\psi}^{jm'} = \sum_{m=j,\,\ldots,\,-j} D^j_{m'm}(g)\,\psi^{jm}$$

Из (6) вытекает, что интеграл от произведения трёх D-ф-ций (в частности, от трёх полиномов Лежандра) выражается через К.—Г. к.

5) Одним из наиб. важных физ. приложений К.—Г. к. является теорема Вигнера — Эккарта о виде матричных элементов тензорных операторов:

$$\langle j'm' \,|\, T_{JM} \,|\, jm\rangle = C^{j'm'}_{jm;\,JM}\,\langle j' \,\|\, T_J \,\|\, j\rangle. \quad (7)$$

Здесь T_{JM} — неприводимый тензорный оператор ранга J, имеющий $2J+1$ компонент ($M=J, J-1, \ldots, -J$) и преобразующийся при вращениях так же, как волновая ф-ция состояния с моментом J, т. е. по неприводимому представлению $D^{(J)}$ группы $SO(3)$; $\langle j' \| T_J \| j\rangle$ — приведённый (редуцированный) матричный элемент, к-рый уже не зависит от проекций m_1, m_2 и M и является инвариантом относительно вращений. Замечат. особенностью теоремы Вигнера — Эккарта является явное отделение теоретико-групповых аспектов оператора T_{JM} [связанных с К.—Г. к. ф-лой (7)] от его спец. свойств, зависящих от конкретной физ. задачи (приведённые матричные элементы, к-рые не могут быть вычислены в общем виде).

При сложении более двух моментов применяются *Рака коэффициенты* и $3nj$-символы. Для упрощения вычислений при сложении большого числа моментов развита спец. диаграммная техника [4].

Различные свойства К.—Г. к. наиб. полно изложены в монографиях [3, 5] и в [6].

Лит.: 1) Вигнер Е., Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, пер. с англ., М., 1961; 2) Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория, 3 изд., М., 1974; 3) Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К., Квантовая теория углового момента, Л., 1975; 4) Юцис А. П., Левинсон И. Б., Ванагас В. В., Математический аппарат теории момента количества движения, Вильнюс, 1960; 5) Биденхарн Л., Лаук Дж., Угловой момент в квантовой физике, пер. с англ., т. 1—2, М., 1984; 6) Смородинский Я. А., Шелепин Л. А., Коэффициенты Клебша — Гордана с разных сторон, «УФН», 1972, т. 106, с. 3; 7) Эдмондс А., Угловые моменты в квантовой механике, в сб.: Деформация атомных ядер, пер. с англ., М., 1958. *В. С. Попов.*

КЛЕЙНА — ГОРДОНА УРАВНЕНИЕ (Клейна — Гордона — Фока уравнение) — простейшее релятивистски-инвариантное ур-ние, описывающее свободное скалярное (или псевдоскалярное) *поле физическое*. Впервые получено в 1926 Э. Шрёдингером (как релятивистское обобщение *Шрёдингера уравнения*) и независимо О. Клейном (О. Klein), В. А. Фоком и В. Гордоном (W. Gordon). В квантовой теории поля применяется для описания частиц со спином 0. В *Минковского пространстве-времени* К.—Г. у.— линейное однородное дифференц. ур-ние 2-го порядка: $(\Box + m^2)\varphi(x) = 0$, где $\Box$ — *Д'Аламбера оператор*, m — масса частицы, φ — полевая ф-ция или её компоненты в пространстве *внутренней симметрии* ($x=(x^0, \boldsymbol{x})$ — точка пространства-времени; используется система единиц, в к-рой $\hbar = c = 1$). Решение К.—Г. у. записывают в виде разложения по плоским волнам:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d\boldsymbol{p}\,(2p^0)^{-1/2}\left\{e^{ipx}a^+(\boldsymbol{p}) + e^{-ipx}a^-(\boldsymbol{p})\right\},$$

$$p^0 = (\boldsymbol{p}^2 + m^2)^{1/2},$$

где $p=(p^0, \boldsymbol{p})$ — 4-импульс, $px = p^0x^0 - \boldsymbol{px}$, $a^+(\boldsymbol{p})$ и $a^-(\boldsymbol{p})$ — положительно- и отрицательно-частотные компоненты Фурье. При *каноническом квантовании* a^+ и a^- интерпретируются как операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом $\boldsymbol{p}$ и энергией p^0. В их терминах *гамильтониан* свободного поля имеет вид $H = \int d\boldsymbol{p}\,p^0(\boldsymbol{p})a^+(\boldsymbol{p})a^-(\boldsymbol{p})$. К.—Г. у. удовлетворяют компоненты любого свободного поля (спинорного, векторного и др.). При $m=0$ К.—Г. у. переходит в *Д'Аламбера уравнение*. *В римановом пространстве* с метрикой $g_{\mu\nu}$ (напр., в присутствии гравитац. поля с такой метрикой) К.—Г. у. имеет вид

$$(-g)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[(-g)^{1/2}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\varphi\right] + m^2\varphi = 0,$$

где g — определитель матрицы $\|g^{\mu\nu}\|$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Изучены К.—Г. у. с разл. видами нелинейности (напр., *синус-Гордона уравнение*).

Лит.: Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, М., 1980. *В. П. Павлов.*

КЛЕЙНА — НИШИНЫ ФОРМУЛА — выражение для дифференц. сечения $d\sigma$ рассеяния фотона на электроне (см. *Комптона эффект*). В лаб. системе координат

$$d\sigma = \frac{1}{2}r_0^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \sin^2\theta\right)d\Omega_2, \quad (1)$$

где ω_1 и ω_2 — частоты падающего и рассеянного фотона, $d\Omega_2$ — элемент телесного угла для рассеянного фотона, θ — угол рассеяния, параметр $r_0 = e^2/mc^2 = 2{,}81 \times 10^{-13}$ см — т. н. *классический радиус электрона* (e, m — заряд и масса электрона, c — скорость света). Частоты ω_1 и ω_2 связаны соотношением Комптона:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{1 + (\hbar\omega_1/mc^2)(1-\cos\theta)} \quad (2)$$

($\hbar$ — постоянная Планка). Ф-лу (1) впервые получили О. Клейн и И. Нишина (О. Klein, I. Nishina) в 1929 в рамках теории, использующей формальный аппарат квантовой механики и *Дирака уравнение* для описания релятивистского электрона. В 1930 эта ф-ла была заново выведена И. Е. Таммом.

В пределе $\hbar\omega_1 \ll mc^2$ $\hbar$ выпадает из ф-л (1) и (2), при этом (1) переходит в классич. ф-лу Томсона, описывающую рассеяние света без изменения частоты (т. н. томсоновское рассеяние):

$$d\sigma = \frac{1}{2}r_0^2(1 + \cos^2\theta)\,d\Omega_2.$$