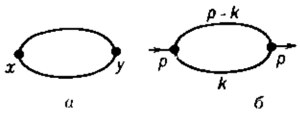
5. Расходимости и перенормировки

Формально математически появление расходимостей связано с тем, что пропагаторы $D_c(x)$ являются сингулярными (точнее, обобщёнными) ф-циями, обладающими в окрестности светового конуса при $x^2 \sim 0$ особенностями типа полюсов и дельта-функций по x^2. Поэтому их произведения, возникающие в матричных элементах, к-рым на диаграммах отвечают замкнутые петли, плохо определены с матем. точки зрения. Импульсные фурье-образы таких произведений могут не существовать, а — формально — выражаться через расходящиеся импульсные интегралы. Так, напр., фейнмановский интеграл

$$I(p) \sim \frac{i}{\pi} \int \frac{d^4k}{(m^2-k^2-i0)\,[m^2-(p-k)^2-i0]} \qquad (12)$$

(где p — внеш. 4-импульс, k — импульс интегрирования), отвечающий простейшей однопетлевой диаграмме с двумя внутр. скалярными линиями (рис.), не существует.

Однопетлевая диаграмма Фейнмана с двумя скалярными линиями: *а* — в координатном представлении; *б* — в импульсном представлении.



Он пропорц. фурье-образу квадрата пропагатора $D_c(x)$ скалярного поля и логарифмически расходится на верхнем пределе (т. е. в УФ-области виртуальных импульсов $|k| \to \infty$, так что, напр., если обрезать интеграл на верхнем пределе при $|k| = \Lambda$, то

$$I_\Lambda(p) = \frac{i}{\pi^2} \int\limits_{|k| \leqslant \Lambda} \frac{d^4k}{(m^2-k^2)\,[m^2-(p-k)^2]}\Bigg|_{\Lambda\to\infty} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \ln \Lambda^2 + I_{\text{кон}}(p), \qquad (13)$$

где $I_{\text{кон}}(p)$ — конечное выражение.

Проблема УФ-расходимостей была решена (во всяком случае с точки зрения получения конечных выражений для большинства физически интересных величин) во 2-й пол. 40-х гг. на основе идеи о перенормировках (ренормировках). Суть последней состоит в том, что бесконечные эффекты квантовых флуктуаций, отвечающих замкнутым петлям диаграмм, могут быть выделены в факторы, имеющие характер поправок к исходным характеристикам системы. В итоге массы и константы связи g меняются за счёт взаимодействия, т. е. перенормируются. При этом из-за УФ-расходимостей ренормирующие добавки оказываются бесконечно большими. Поэтому соотношения перенормировок

$$\begin{aligned} m_0 &\longrightarrow m = m_0 + \Delta m = m_0 Z_m(\ldots), \\ g_0 &\longrightarrow g = g_0 + \Delta g = g_0 Z_g(\ldots) \end{aligned} \qquad (14)$$

(где Z_m, Z_g — факторы перенормировки), связывающие исходные, т. н. затравочные массы m_0 и затравочные заряды (т. е. константы связи) g_0 с физическими m, g, оказываются сингулярными. Чтобы не иметь дело с бессмысленными бесконечными выражениями, вводят ту или иную вспомогат. *регуляризацию расходимостей* (наподобие использованного в (13) обрезания при $|k| = \Lambda$. В аргументах (обозначенных в правых частях (14) многоточиями) радиац. поправок Δm, Δg, так же как и факторов перенормировок Z_i, помимо m_0 и g_0, содержатся сингулярные зависимости от параметров вспомогат. регуляризации.

Устранение расходимостей происходит путём отождествления перенормированных масс и зарядов m и g с их физ. значениями. Практически для устранения расходимостей часто используют также приём введения в исходный лагранжиан *контрчленов* и выражают m_0 и g_0 в лагранжиане через физические m и g формальными соотношениями, обратными к (14). Разлагая (14) в ряды по физ. параметру взаимодействия:

$$m_0 = m + gM_1 + g^2M_2 + \ldots,$$
$$g_0 = g + g^2G_1 + g^3G_2 + \ldots,$$

подбирают сингулярные коэффициенты M_l, G_l т. о., чтобы в точности скомпенсировать расходимости, возникающие в фейнмановских интегралах. Класс моделей КТП, для к-рых такую программу можно последовательно провести во всех порядках теории возмущений и в к-рых, т. о., все без исключения УФ-расходимости удаётся «убрать» в факторы перенормировки масс и констант связи, наз. классом **перенормируемых теорий**. В теориях этого класса все матричные элементы и ф-ции Грина оказываются в результате выраженными несингулярным образом через физ. массы, заряды и кинематич. переменные.

В перенормируемых моделях можно поэтому при желании совершенно абстрагироваться от затравочных параметров и УФ-расходимостей, рассматриваемых по отдельности, и полностью характеризовать результаты теоретич. расчётов заданием конечного числа физ. значений масс и зарядов. Матем. основу этого утверждения представляет *Боголюбова — Парасюка теорема* о перенормируемости. Из неё следует достаточно простая рецептура получения конечных однозначных выражений для матричных элементов, формализованная в виде т. н. *R-операции* Боголюбова.

В то же время в неперенормируемых моделях, примером к-рых может служить теперь уже отошедшая в прошлое формулировка слабого взаимодействия в виде четырёхфермионного локального лагранжиана Ферми, не удаётся «собрать» все расходимости в «агрегаты», перенормирующие массы и заряды.

Перенормируемые модели КТП характеризуются, как правило, безразмерными константами связи, логарифмически расходящимися вкладами в перенормировку констант связи и масс фермионов и квадратично расходящимися радиац. поправками к массам скалярных частиц (в случае их наличия). Для подобных моделей в итоге проведения процедуры перенормировки получают *перенормированную теорию возмущений*, к-рая и служит основой практич. расчётов.

В перенормируемых моделях КТП важную роль играют перенормированные ф-ции Грина (одетые пропагаторы) и *вершинные части*, включающие в себя эффекты взаимодействия. Они могут быть представлены бесконечными суммами членов, отвечающих всё более усложняющимся диаграммам Фейнмана с фиксированным числом и типом внеш. линий. Для подобных величин можно дать формальные определения либо через *вакуумные средние* хронологич. произведений полевых операторов в представлении взаимодействия и S-матрицы (что эквивалентно вакуумным средним от T-произведений полных, т. е. гейзенберговых, операторов), либо через функциональные производные от *производящего функционала* $Z(J)$, выражаемого через т. н. расширенную матрицу рассеяния $S(J)$, функционально зависящую от вспомогат. классич. источников $J_a(x)$ полей $u^a(x)$.

Формализм производящих функционалов в КТП является аналогом соответствующего формализма статистич. физики. Он позволяет получить для полных ф-ций Грина и вершинных ф-ций ур-ния в функциональных производных — *Швингера уравнения*, из к-рых в свою очередь можно получить бесконечную цепочку интегродифференц. ур-ний — *Дайсона уравнений*. Последние подобны цепочке ур-ний для корреляц. ф-ций статистич. физики.

6. УФ-асимптотики и ренормгруппа

С УФ-расходимостями в КТП тесно связаны высокоэнергетич. асимптотики перенормированных выражений. Напр., логарифмич. расходимости (12) простейшего фейнмановского интеграла $I(p)$ отвечает логарифмич. асимптотика

$$I_{\text{кон}}(p) \sim \ln \frac{|p^2|}{m^2} + \text{const при } |p^2| \gg m^2$$