случай медленно меняющегося $p(x)$. Предэкспоненц. множитель обеспечивает закон сохранения числа частиц, т. е. независимость потока числа частиц

$$j=(2mi)^{-1}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)=(p/m)\,|\psi|^2$$

от координаты (звёздочка означает комплексное сопряжение).

Решения (3) с той же точностью справедливы и в классически недоступной области $\mathscr{E}<U(x)$. Однако в этом случае величина $p(x)$ становится чисто мнимой. Поэтому одно из решений экспоненциально убывает, а другое растёт по мере удаления в классически недоступную область. Эти решения описывают чисто квантовый эффект подбарьерного проникновения частиц.

Критерий (1) не выполняется вблизи классич. точек поворота x_0, где $U(x_0)=\mathscr{E}$. Если $U(x)$ регулярен в точке x_0, то вблизи неё ур-ние Шрёдингера можно приближённо заменить ур-нием с линейным потенциалом $U(x)=U'(x_0)(x-x_0)$, к-рое сводится к ур-нию Эйри (см. *Эйри функция*).

Его решения:

$$\psi=C\sqrt{\frac{\xi}{p(x)}}\,Z_{1/3}(\xi), \qquad (4)$$

где $Z_{1/3}(\xi)$ — любое решение ур-ния Бесселя с индексом $1/3$ (см. *Цилиндрические функции*) и

$$\xi=\int\limits_{x_0}^{x}p\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{-U'(x_0)}\,(x-x_0)^{3/2}.$$

Замена точного ур-ния Шрёдингера приближённым вблизи нулей и особенностей ф-ции $p^2(x)$ носит назв. метода эталонных ур-ний. Так, вблизи простого нуля ф-ции $p^2(x)$ эталонным является ур-ние Эйри; если близкими оказываются два простых нуля, то эталонным является ур-ние параболич. цилиндра (см. *Параболического цилиндра функции*); при сближении простого нуля и полюса эталонным оказывается вырожденное гипергеом. ур-ние (см. *Вырожденная гипергеометрическая функция*). Во всех этих случаях известны аналитич. свойства решений эталонных ур-ний. Возможны и более сложные эталонные ур-ния, решения к-рых пока не исследованы.

Решения эталонного ур-ния (4) плавно сшиваются с квазиклассич. решениями (3), определяя тем самым правила перехода через точки поворота. В частности, то из решений (3), к-рое экспоненциально убывает в классически недоступной области, в разрешённой области ведёт себя как

$$\psi(x)=\frac{2C}{\sqrt{p(x)}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int\limits_{x_0}^{x}p(x)\,dx-\frac{\pi}{4}\right), \qquad (5)$$

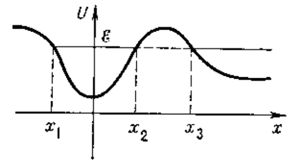
где x_0 — классич. точка поворота. Если классически доступная область ограничена обычными точками поворота x_1, x_2, то уровни энергии определяются правилами квантования Бора — Зоммерфельда:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}p(x)\,dx=(n+{}^1/_2)\,\pi\hbar. \qquad (6)$$

Здесь n — квантовое число, нумерующее уровни. При переходе к классич. механике величина n играет роль *адиабатического инварианта*. Если одна или обе границы классич. движения близки к особенностям потенциала, то в правой части ур-ния (6) вместо слагаемого ½ появляется не зависящая от n постоянная γ, значение к-рой определяется характером особенности.

В 1913 Н. Бор (N. Bohr) постулировал правила квантования (6) и с их помощью впервые интерпретировал эксперим. спектры поглощения атомов водорода. В силу спец. симметрии квазиклассич. уровни энергии атома водорода совпадают с точными.

Пусть потенциал $U(x)$ таков, что в нём имеется две области классически разрешённого движения, одна из к-рых ограничена (рис.). Классич. частица, находящаяся в потенц. яме, не сможет покинуть её. Но квантовая частица имеет отличную от нуля волновую ф-цию и в подбарьерной области. Выход частицы из потенц. ямы сквозь барьер является квантовым эффектом, наз. туннелированием (туннельным проникновением; см. *Туннельный эффект*).



Вероятность туннелирования за единицу времени определяется ур-нием

$$w=\nu(\mathscr{E})\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int\limits_{x_2}^{x_3}|p(x)|\,dx\right], \qquad (7)$$

где $\nu(\mathscr{E})$ — классич. частота движения частиц в потенц. яме. Множитель $\nu(\mathscr{E})$ возникает из условия нормировки волновой ф-ции в классически доступной области. Представление о квантовом туннелировании и его количеств. выражение (7) были впервые применены Г. А. Гамовым (G. Gamov) для объяснения *альфа-распада*.

Другим сугубо квантовым эффектом является отражение потенц. барьером частицы с энергией, большей высоты барьера. Если потенциал является аналитич. ф-цией x, то в К. п. коэф. надбарьерного отражения (доля отраженных частиц) равен

$$R(\mathscr{E})=\exp\left[\frac{2i}{\hbar}\int\limits_{x_0^*}^{x_0}p(x)\,dx\right]. \qquad (8)$$

Интегрирование в показателе экспоненты происходит вдоль контура в комплексной плоскости x, идущего из ближайшей к веществ. оси комплексной точки поворота x_0^* в ниж. полуплоскости к комплексно сопряжённой точке поворота x_0. Ф-лы (7) и (8) применимы в том случае, когда показатели экспонент велики.

Надбарьерное отражение является частным случаем процесса, запрещённого классич. механикой. В квантовой механике такие процессы, вообще говоря, возможны, но имеют экспоненциально малую вероятность. Классич. траектория такого процесса, т. е. решение вариационного ур-ния $\delta S=0$, существует, но оказывается комплексной. Комплексно и действие S вдоль траектории. Вероятность классически запрещённого перехода определяется ф-лой

$$w\sim\exp\left(-\frac{2\,\mathrm{Im}\,S}{\hbar}\right),$$

где действие взято вдоль классич. пути с мин. мнимой частью $\mathrm{Im}S$. Вычисление предэкспоненц. множителя требует конкретизации задачи.

Задача о переходах в квантовой системе часто решается методом *адиабатического приближения*, сходным с квазиклассическим. Необходимым условием применимости адиабатич. приближения является возможность разделения движений на быстрые и медленные. Так, в случае атомных соударений движение ионов можно считать медленным, а движение электронов быстрым. Если система помещена в переменное внеш. поле, его частоты должны быть малы по сравнению с характерными частотами системы. В адиабатич. приближении уровни энергии $\mathscr{E}_i$ квантовой системы можно считать параметрически зависящими от времени t. Условие адиабатичности нарушается при пересечении любых двух уровней $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ (см. *Пересечение уровней*). В небольшом интервале времени около момента пересечения двух термов происходят переходы между ними. Вблизи точки пересечения справедлива эталонная система двух ур-ний для амплитуд состояний, являющаяся