

таковы: 1) $y_1 = x_1^2$, $y_i = x_i$ ($i > 1$); 2) $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2$, $y_i = x_i$ ($i > 1$); 3) $y_1 = x_1^4 + x_1^2 x_2 + x_1 x_3$, $y_i = x_i$ ($i > 1$); 4) $y_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_3 + x_2 x_4$, $y_2 = x_1 x_2$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4$. Отображение $R^2 \rightarrow R^3$ обычно имеет особенностями лишь «зонтики Уитни — Кэли» (рис. 2; $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_1 x_2$, $y_3 = x_2^2$). При переходе к высшим размерностям списки типичных особенностей растут и даже становятся конти-

бифуркац. значений параметра μ , при к-рых возникают особенности отображения $(x, \mu) \rightarrow \mu$ гиперповерхности $F(x, \mu) = 0$ в пространстве μ , где F — типичное семейство гладких ф-ций вектора x и векторного параметра μ . Типичные особенности каустик (или градиентных отображений $x \rightarrow \partial S / \partial x$, или отображений Гаусса, соответствующих точке поверхности направление нормали) можно описать как множества бифуркац. значений

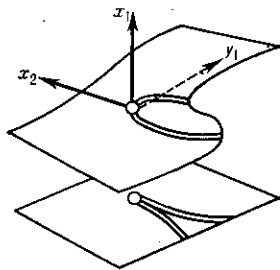


Рис. 1.

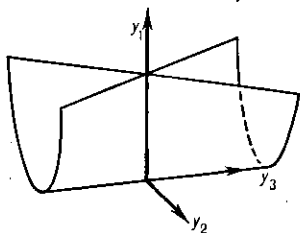


Рис. 2.

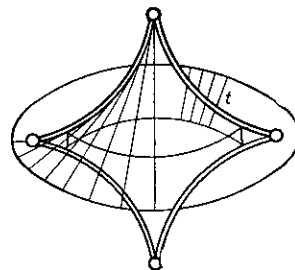


Рис. 3.

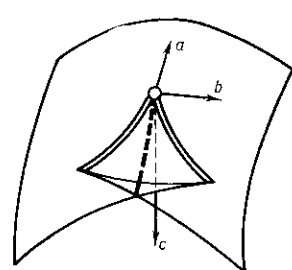


Рис. 4.

нуальными (напр., не всякое отображение $R^n \rightarrow R^n$ при $n > 8$ аппроксимируется устойчивым). Число классов топологически различных особенностей остаётся конечным при любых размерностях.

В теории бифуркаций рассматривается динамическая система, описываемая уравнением $\dot{x} = \theta(x, \epsilon)$, с заданным векторным полем θ в n -мерном фазовом пространстве $\{x\}$. Поле зависит от k -мерного параметра ϵ . Множество состояний равновесия определяется в $(n+k)$ -мерном пространстве $\{x, \epsilon\}$ k -мерную поверхность $\theta(x, \epsilon) = 0$. В типичном случае эта поверхность гладкая, но её проекция на пространство «управляющих параметров» $\{\epsilon\}$ может иметь особенности. Если рассматривать значения $\{\epsilon\}$ как ф-ции на поверхности состояний равновесия, то точки, в к-рых якобиан этих ф-ций равен 0, наз. бифуркационными, а значения ф-ций в этих точках — бифуркац. значениями параметров ϵ . При подходе управляющих параметров к бифуркац. значениям положения равновесия «бифурцируют» (рождаются или умирают). Знание геометрии типичных особенностей позволяет описывать происходящие при этом явления, напр. скачкообразный переход системы к далёкому состоянию равновесия при плавном изменении параметров. Такие скачки способны разрушить систему (механическую, уругую, электрическую, биологическую, химическую и т. п.), откуда и названно К. т.

Наиб. успех достигнут в приложениях К. т. к оптике, где даже типичные особенности каустик и перестройки волновых фронтов в трёхмерном пространстве не были известны. Рассмотрим возмущение (свет, звук, ударную волну, эпидемию и др.), распространяющееся с единичной скоростью из области, ограниченной гладким фронтом. Чтобы построить фронт через время t , нужно отложить отрезок длины t на каждом луче нормали. Через нек-рое время на движущемся фронте появляются особенности в точках каустики (огibaющей семейства лучей) исходного фронта. Напр., при распространении возмущения внутрь эллипса на плоскости особенности фронта скользят по каустике, имеющей 4 точки возврата (рис. 3). Эти особенности устойчивы (не исчезают при малой деформации исходного фронта). Типичные особенности фронтов в трёхмерном пространстве — это самопересечения, рёбра возврата (нормальная форма $x^2 = y^2$) и ласточкины хвосты [рис. 4; эта поверхность образована точками (a, b, c) , для к-рых многочлен $x^4 + ax^2 + bx + c$ имеет кратный корень]. Каустики в трёхмерном пространстве имеют особенности ещё двух видов (пирамида и кошелёк; рис. 5).

Почти все особенности волновых фронтов (или Лемандр преобразований) можно описать как множества

параметра μ , при к-рых ф-ция $F(x, \mu)$ переменной x имеет вырожденную критич. точку. Ласточкин хвост, пирамида и кошелёк получаются при

$$F = x^5 + \mu_1 x^2 + \mu_2 x^2 + \mu_3 x;$$

$$F = x_1^2 x_2 + x_2^3 + \mu_1 x_2^2 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1.$$

Особенностям каустик и фронтов геом. оптики соответствуют в волновой теории особенности асимптотич. осциллирующих интегралов в методе стационарной фазы или многомерном перевала методе при слиянии нек. стационарных точек. По порядку величины интеграл при подходе к точке каустики возрастает в $\lambda^{-\nu}$ раз, где λ — длина волны, а показатель ν равен $1/6$ для общей точки каустики (A_2 , особенность Эйри); $1/4$ для общей точки ребра возврата (A_3 , особенность Пирси); $3/10$ для ласточкина хвоста (особенность A_4); $1/3$ для кошелёка и пирамиды (особенности D_4). Эти особенности связаны с простыми группами Ли $A_k \sim SU(k+1)$, $D_k \sim O(2k)$, а также с правильными многогранниками [конечными подгруппами группы $SU(2)$]. Показатель ν определяет интенсивность света вблизи каустики и её

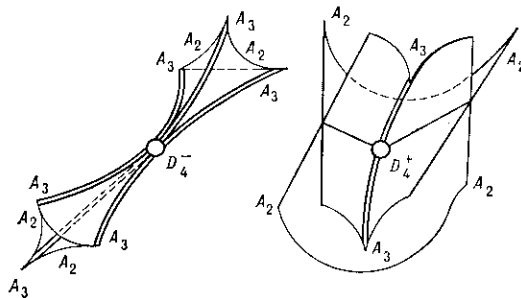


Рис. 5.

особенностей, разрушение среды интенсивной волной, скопление частиц при движении нильевидной среды с потенциалом скоростей (с иным значением ν) и т. п. Универсальность геометрии бифуркац. диаграмм позволяет использовать их для одновременного моделирования многих различных по своему физическому смыслу явлений.

Лит.: Постон Т., Стюарт И., Теория катастроф и её приложения, пер. с англ., М., 1980; Арнольд В. И., Теория катастроф, 2 изд., М., 1983; его же, Особенности, бифуркации и катастрофы, «УФН», 1983, т. 141, с. 569; Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М., Особенности дифференцируемых отображений, [т. 1—2], М., 1982—84; Гилмор Р., Прикладная теория катастроф, пер. с англ., кн. 1—2, М., 1984. В. И. Арнольд.