полями. Поле Янга — Миллса, соответствующее произвольной простой компактной группе Ли, удобно описывать векторной ф-цией $A_\mu(x)$, принимающей значения в алгебре Ли этой группы: $A_\mu(x)=A^a_\mu(x)t^a$, где t^a — *генераторы группы* в присоединённом представлении (нумеруемые индексом a). Это значит, что при каждом x поле $A_\mu(x)=A^{cd}_\mu(x)$ является матрицей в пространстве *внутренней симметрии.*

Динамика полей Янга — Миллса фиксируется требованием *калибровочной инвариантности.* Если ограничиться мин. числом производных, то калибровочно-инвариантный лагранжиан Янга — Миллса имеет вид:

$$L=\frac{1}{8}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=-\frac{1}{4}\,F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}, \qquad (4)$$

где $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+g[A_\mu,\ A_\nu]$ — тензор напряжённости поля Янга — Миллса, g — *константа взаимодействия* (константа связи).

Калибровочно-инвариантное взаимодействие поля Янга — Миллса с прочими полями (полями материи) вводится путём замены производных в свободном лагранжиане полей материи на *ковариантные производные*

$$\partial_\mu \to D_\mu=\partial_\mu-g\Gamma(A_\mu), \qquad (5)$$

где $\Gamma(A_\mu)$ — представление матриц A_μ, соответствующее рассматриваемому представлению калибровочной группы. Так, если $G=SU(2)$, как, напр., в объединённой теории эл.-магн. и слабого взаимодействий (т. е. в теории *электрослабого взаимодействия*), а поля материи реализуют её двумерное представление (напр., кварки одного *поколения фермионов*), то $\Gamma(A_\mu)=(2i)^{-1}A^a_\mu\tau^a$, где τ_a $(a=1,\ 2,\ 3)$ — *Паули матрицы*; для группы $SU(3)$ (напр., в *квантовой хромодинамике*) $\Gamma(A_\mu)=(2i)^{-1}A^a_\mu\lambda^a$, где λ^a $(a=1,\ 2,\ \ldots,\ 8)$ — *Гелл-Мана матрицы.*

Ур-ния Эйлера — Лагранжа для поля Янга — Миллса имеют вид

$$D_\mu F_{\mu\nu}=j_\nu, \qquad (6)$$

где j_ν — ток полей материи. По форме эти ур-ния совпадают с ур-ниями Максвелла, отличаясь лишь явным видом тензора напряжённости $F_{\mu\nu}$ и ковариантной производной D_μ.

Помимо полей Янга — Миллса и эл.-магн. поля к К. п. относится также гравитац. поле, если считать, что поля материи сосредоточены в конечном объёме и исчезают на бесконечности. В этом случае группой симметрии является группа Пуанкаре, а калибровочными преобразованиями — преобразования координат, не меняющие гравитац. полей на бесконечности. Роль калибровочных полей играют в этом случае *Кристоффеля символы* $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ (см. *Тяготение*).

Поля Янга — Миллса, как и гравитац. поле, допускают геом. интерпретацию. Подобно символам Кристоффеля в теории тяготения, они описывают параллельный перенос в пространстве внутр. симметрии; тензор напряжённости $F_{\mu\nu}$ является тензором кривизны этого пространства. Последоват. геом. трактовка полей Янга — Миллса может быть дана в рамках теории расслоенных пространств (см. *Расслоение*). Полю Янга — Миллса в этой теории соответствует понятие *связности* в гл. расслоении.

Инвариантность относительно преобразований, зависящих от произвольной ф-ции, согласно второй *Нётер теореме*, приводит к тому, что в случае калибровочно-инвариантных лагранжианов не все ур-ния Эйлера — Лагранжа описывают динамику системы. Часть из них представляет собой ур-ния связи, причём их число равно числу произвольных ф-ций, от к-рых зависит калибровочное преобразование. Так, для поля Янга — Миллса компонента A_0 представляет собой не динамич. переменную, а множитель Лагранжа. Соответствующий ей канонич. импульс, вычисленный по стандартной ф-ле $P^a_\mu=\delta L/\delta\dot{A}^a_\mu$, тождественно обращается в нуль, а ур-ние Эйлера — Лагранжа, получающееся при варьировании действия по A_0,

$$D_iP_i=j_0 \quad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (7)$$

не содержит производных по времени и поэтому не описывает динамику системы, а является ур-нием связи. Наличие связей приводит к необходимости модифицировать процедуру *канонического квантования.* Наложение канонич. *перестановочных соотношений* на переменные A^a_μ, P^a_μ очевидным образом привело бы к противоречию с фактом обращения в нуль импульса P_0.

Общая теория квантования систем со связями была развита П. А. М. Дираком (P. A. M. Dirac), Л. Д. Фаддеевым и др. Её суть состоит в том, что канонич. перестановочные соотношения накладываются лишь на истинные динамич. переменные, к-рые можно найти, решив ур-ния связей и наложив дополнит. условия, являющиеся в случае полей Янга — Миллса условиями калибровки. Если, напр., наложить на поля A_i условие кулоновской калибровки $\partial_iA_i=0$, то ур-ние связи (7) можно явно решить, выразив продольную часть вектора импульса P_i через трёхмерно-поперечные компоненты P^{tr}_i, A^{tr}_i. Если подставить решение этого ур-ния в исходное действие, то оно будет зависеть только от трёхмерно-поперечных компонент P^{tr}_i, A^{tr}_i, к-рые и являются в данном случае истинными динамич. переменными и в квантовой теории должны удовлетворять канонич. перестановочным соотношениям. В электродинамике подобная процедура соответствует описанию системы в терминах поперечно поляризованных фотонов.

В случае неабелевых К. п. решение ур-ния (7) представляет собой бесконечный ряд по константе связи g, подстановка к-рого в действие порождает бесконечный ряд вершин взаимодействия, отсутствовавших в исходном лагранжиане. Поэтому фейнмановская диаграммная техника (см. *Фейнмана диаграммы*), возникающая при построении теории возмущений для *матрицы рассеяния*, содержит дополнит. элементы. Оказывается, однако, что возникающий т. о. ряд теории возмущений можно воспроизвести с помощью введения вспомогат. полей (т. н. *Фаддеева — Попова ду́хов*) и конечного числа вершин, описывающих локальное взаимодействие этих полей с полями Янга — Миллса.

Для практич. вычислений более удобными являются не калибровки типа кулоновской, а явно релятивистски инвариантные калибровки, напр. лоренцова калибровка $\partial_\mu A_\mu=0$. В этом случае диаграммы Фейнмана, помимо стандартных элементов, содержат также дополнит. элементы, отвечающие «ду́ховым полям». Релятивистски инвариантные правила Фейнмана удобно описывать с помощью эфф. действия, к-рое явно учитывает условие калибровки и вклад духовых полей. Это действие можно записать в виде

$$S_{\text{эф}}=\int\Big\{\frac{1}{8}\,\mathrm{Tr}\Big(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{2}{\beta}(\partial_\mu A_\mu)^2-$$
$$-4\bar{c}\,(\Box c-g\,\partial_\mu[A_\mu,\ c])\Big)+i\bar{\psi}\gamma_\mu D_\mu\psi-m\bar{\psi}\psi\Big\}\,d^4x, \qquad (8)$$

где $\Box$ — *Д'Аламбера оператор*, β — параметр, фиксирующий калибровку. Духовые поля $\bar{c}$, c подчиняются статистике Ферми — Дирака, т. е. являются антикоммутирующими переменными. Они порождают лишь внутр. линии фейнмановских диаграмм и отсутствуют в наблюдаемых начальных и конечных асимптотич. состояниях. Эфф. действие (8), помимо духовых полей $\bar{c}$, c, содержит также нефиз. компоненты векторного поля A_μ, описывающие продольно поляризо-