ф-ции $B_z(p,\ q)$, $\Gamma(a,\ z)$, $\Phi(z)$ определяются след. образом:

$$B_z(p,\ q)=\int_0^z t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt,$$

$$\Gamma(a,\ z)=\int_z^\infty e^{-t}t^{a-1}\,dt,$$

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt.$$

Неполную гамма-функцию $\Gamma(a,\ z)$ при $a=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$, можно выразить через интегральные экспоненты

$$E_m(z)=\int_1^\infty t^{-m}e^{-zt}\,dt \quad (\mathrm{Re}\, z>0,\ m=0,\ 1,\ \ldots),$$

для к-рых справедливы рекуррентное соотношение и ф-ла дифференцирования:

$$E_m(z)=[e^{-z}-zE_{m-1}(z)]/(m-1), \quad E_m'(z)=-E_{m-1}(z),$$

разложение в ряд:

$$E_1(z)=-C-\ln z+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}z^k/k!\,k$$

($C=0{,}5772$ — постоянная Эйлера) и асимптотич. представление:

$$E_m(z)\sim\frac{e^{-z}}{z}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{z^k}\frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)},$$

где $\Gamma(n)$ — гамма-функция.

Наряду с $E_1(z)$ употребляются родственные ей интегральная показательная функция $Ei(z)$, связанная с $E_1(z)$ соотношением $E_1(z)=-Ei(-z)$, и ф-ции

$$\mathrm{Si}(z)=\int_0^z\frac{\sin s}{s}\,ds, \quad \mathrm{Ci}(z)=\int_\infty^z\frac{\cos s}{s}\,ds,$$

к-рые наз. интегральным синусом и интегральным косинусом. При $z>0$

$$\mathrm{Ci}(z)=[E_1(iz)+E_1(-iz)]/2,$$

$$\mathrm{Si}(z)=\pi/2+[E_1(iz)-E_1(-iz)]/2i,$$

справедливы разложения в степенные ряды:

$$\mathrm{Si}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!\,(2k+1)}, \qquad (2)$$

$$\mathrm{Ci}(z)=C+\ln z+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!\,2k} \qquad (3)$$

и асимптотич. представления:

$$\mathrm{Si}(z)=\frac{\pi}{2}-\frac{\cos z}{z}P(z)-\frac{\sin z}{z}Q(z),$$

$$\mathrm{Ci}(z)=\frac{\sin z}{z}P(z)-\frac{\cos z}{z}Q(z),$$

где

$$P(z)\sim\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k)!}{z^{2k}}, \quad Q(z)\sim\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k+1)!}{z^{2k+1}}.$$

Ряд (2) определяет интегральный синус как однозначную аналитич. ф-цию во всей комплексной плоскости z, а ряд (3) определяет интегральный косинус как однозначную аналитич. ф-цию в комплексной плоскости z с разрезом вдоль отрицат. действительной полуоси, причём $\mathrm{Ci}(x\pm i0)=\mathrm{Ci}(-x)\pm i\pi$.

Интегральный логарифм, определяемый для $z>0$ ф-лой

$$\mathrm{li}(z)=\int_0^z\frac{dt}{\ln t}$$

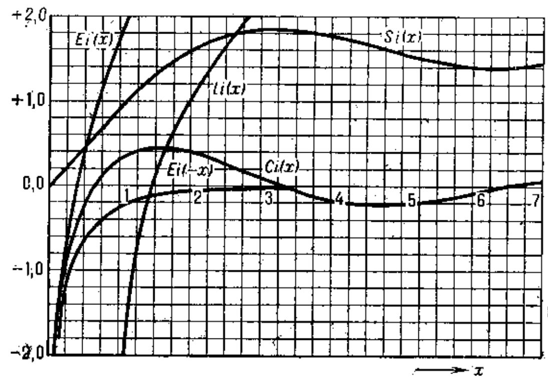
(при $z>1$ следует использовать гл. значение интеграла), связан с ф-цией $\mathrm{Ei}(z)$ соотношением

$$\mathrm{li}(z)=\mathrm{Ei}(\ln z).$$

Ряд

$$\mathrm{li}(z)=C+\ln(-\ln z)+\sum_{k=1}^{\infty}(\ln z)^k/k!\,k$$

определяет ф-цию $\mathrm{li}(z)$ как однозначную аналитич.



ф-цию в комплексной плоскости z с разрезом вдоль действит. оси для $z<0$ и $z>1$, причём

$$\mathrm{li}(x\pm i0)=\mathrm{li}(x)\mp i\pi, \quad x>1.$$

При $x\to 0$ $\mathrm{li}(x)\sim x\ln^{-1}(x^{-1})$.

Интеграл вероятности (интеграл ошибок) $\Phi(z)$ можно разложить в степенной ряд:

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!\,(2k+1)},$$

это целая ф-ция комплексной переменной z. Асимптотич. представление

$$\Phi(z)\sim 1-\frac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}}\left[1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^k z^{2k}}\right]$$

справедливо при $z\to\infty$, $\mathrm{Re}\, z>0$. С интегралом вероятности тесно связаны *Френеля интегралы*

$$S(z)=\int_0^z dt\,\sin(\pi t^2/2), \quad C(z)=\int_0^z dt\,\cos(\pi t^2/2),$$

при $z>0$ имеем

$$C(z)\pm iS(z)=\frac{1\pm i}{2}\Phi\left(\frac{1\mp i}{2}z\sqrt{\pi}\right).$$

Графики функций $\mathrm{Ei}(x)$, $\mathrm{li}(x)$, $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$ приведены на рис.

Лит.: Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., [т. 2], М., 1974; Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, 2 изд., М., 1984. *А. Ф. Никифоров.*

ИНТЕГРА́ЛЬНЫЙ ОПЕРА́ТОР — обобщение понятия матрицы на бесконечно-мерный случай. Матрица K_{ij} отображает векторы x_j из векторного пространства X в векторы $y_i=K_{ij}x_j$ пространства Y. Простейший линейный И. о. определяется равенством $y(t)=\int_S K(t,\ s)x(s)ds$, и отображает ф-ции $x(s)$ из функционального