где $C$ — контур интегрирования в комплексной плоскости, $K(x, t)$ — ядро И. п., $f(t)$ и $F(x)$ — преобразуемая и трансформированная ф-ции. Нормы преобразуемой и трансформированной ф-ций связаны равенством Парсеваля (см. *Ортонормированная система векторов*). Ф-лы, восстанавливающие ф-цию $f(t)$ по заданной $F(x)$, наз. ф-лами обращения И. п. Наиб. употребительны и изучены интегральные преобразования спец. вида (*Лапласа преобразование*, *Меллина преобразование*, *Гильберта преобразование*, *Фурье преобразование* и др.), а также преобразования свёртки с ядром $K(x, t)=K(x-t)$. В многомерных И. п. фигурируют ф-ции векторного аргумента и кратный интеграл по связной области в пространстве аргументов (см. также *Радона преобразование*). Эти И. п. применяют в разл. задачах теоретич. и матем. физики, при решении линейных дифференц. ур-ний, нек-рых типов интегральных ур-ний.

*Лит.:* Диткин В. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, 2 изд., М., 1974; Бейтмен Г., Эрдейи А., Таблицы интегральных преобразований, пер. с англ., т. 1—2, М., 1969—70; Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979. *С. В. Молодцов.*

**ИНТЕГРА́ЛЬНОЕ УРАВНЕ́НИЕ** — ур-ние, содержащее неизвестную ф-цию под знаком интеграла. Их принято разделять на две большие группы: линейные и нелинейные И. у.

Линейным И. у. наз. ур-ние вида

$$A(x)\varphi(x)-\int_D K(x, s)\varphi(s)\,ds=f(x),\ x\in D, \qquad (1)$$

где $A$, $K$, $f$ — заданные ф-ции, $\varphi$ — неизвестная ф-ция, $D$ — область евклидова пространства. Ф-ция $K$ наз. ядром И. у., ф-ция $f$ — свободным членом. Интегрирование в (1) производится по всему объёму области $D$, $ds$ — элемент объёма. Если свободный член $f=0$, то ур-ние (1) наз. однородным, в противном случае — неоднородным. Кроме того, И. у. различают по типу. Если $A(x)\equiv 0$ в области $D$, то ур-ние (1) наз. И. у. 1-го рода; если $A(x)\neq 0$ для всех точек области $D$,— И. у. 2-го рода; если $A(x)$ обращается в нуль на нек-ром подмножестве области $D$,— И. у. 3-го рода.

Аналогично записывают систему линейных И. у., когда $A$, $K$ — матрицы-функции, а $f$ и $\varphi$ — вектор-функции. И. у. появились в нач. 19 в., общая теория построена в кон. 19 — нач. 20 вв. в работах В. Вольтерры (V. Volterra), Э. Фредгольма (E. Fredholm), Д. Гильберта (D. Hilbert) и Э. Шмидта (E. Schmidt).

В одномерном случае на отрезке $[a, b]$ И. у. 1-го и 2-го рода записывают в виде

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds=f(x), \qquad (2)$$

$$\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds=f(x). \qquad (3)$$

Число $\lambda$ наз. параметром И. у. Налагая дополнит. ограничения на известные ф-ции И. у., в частности на ядро $K$, выделяют класс *Фредгольма уравнений*. Напр., к ур-ниям Фредгольма приводит свойство квадратичной интегрируемости ядра, свободного члена и искомой ф-ции, т. е. $\int_a^b\int_a^b |K(x, s)|^2 dxds<\infty$, $\int_a^b |f(x)|^2 dx<\infty$, $\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx<\infty$. Комплексное значение параметра $\lambda$, при к-ром ур-ние (3) с нулевым свободным членом ($f=0$) имеет решение, наз. характеристическим или собственным числом (значением) ядра $K$ или И. у. Ненулевое решение ур-ния (3) при $f=0$ наз. характеристической или собственной функцией ядра $K$ или И. у., принадлежащей собств. числу $\lambda$. Если $\lambda$ не является собств. значением ядра $K$, то его наз. правильным (регулярным) значением (числом) ядра $K$.

Если ядро $K(x, s)$ обращается в нуль при $x<s$ (т. н. ядро Вольтерры), то ур-ния (2), (3) перепишутся в виде

$$\int_a^x K(x, s)\varphi(s)\,ds=f(x),$$

$$\varphi(x)+\lambda\int_a^x K(x, s)\varphi(s)\,ds=f(x)$$

и наз. *Вольтерры уравнениями* 1-го и 2-го рода соответственно.

И. у. Фредгольма 2-го рода

$$\psi(x)+\lambda^*\int_a^b \tilde{K}(x, s)\psi(s)\,ds=g(x), \qquad (4)$$

где $\tilde{K}(x, s)=K^*(s, x)$ — эрмитово сопряжённое ядро, $*$означает комплексное сопряжение, наз. союзным к ур-нию (3). Для ур-ний Фредгольма с непрерывным ядром доказана совокупность теорем, дающих общие сведения о решениях. Из этих теорем следует, что множество собств. значений непрерывного ядра не более чем счётно и не имеет конечных предельных точек. (Непрерывные ядра Вольтерры вообще не имеют собств. чисел.) Кроме того, каждому собств. числу $\lambda$ соответствует конечное число (наз. кратностью собств. значения) линейно независимых собств. ф-ций.

В терминах собств. чисел и собств. ф-ций результаты Фредгольма формулируют в след. форме. Пусть $\lambda_k$ и $r_k\geqslant 1$ $(k=1, 2, \ldots)$ — собств. числа и соответств. этим собств. числам кратности. Если $\lambda\neq\lambda_k$, то И. у. (3) и (4) однозначно разрешимы при любых свободных членах. Если $\lambda=\lambda_k$, то однородные И. у., соответствующие ур-ниям (3) и (4), имеют одинаковое (конечное) число $r_k$ линейно независимых решений: собств. ф-ций $\varphi_k$, $\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_{k+r_k-1}$ ядра $K$ и собств. ф-ций $\psi_k, \psi_{k+1}, \ldots, \psi_{k+r_k-1}$ ядра $\tilde{K}$, соответствующих собств. значениям $\lambda_k$ и $\lambda_k^*$. Если $\lambda=\lambda_k$, то для разрешимости ур-ния (3) необходимо и достаточно, чтобы $(f, \psi_{k+i})=0$, $i=0, 1, \ldots, r_k-1$. При достаточно малых $\lambda$ решение ур-ния Фредгольма можно найти методом последоват. приближений, решение записывают в виде ряда Неймана.

Результаты Фредгольма распространяются на И. у. с полярным ядром $K(x, s)=L(x, s)|x-s|^{-\alpha}$, где $L(x, s)$ — непрерывное ядро, $\alpha<1$.

Ядро $K(x, s)$ И. у. наз. вырожденным, если оно представимо в виде суммы: $K(x, s)=\sum_{n=1}^{m} a_n(x)b_n(s)$. В этом случае И. у. Фредгольма 2-го рода сводится к системе линейных алгебраич. ур-ний для $m$ неизвестных.

Для И. у. с веществ. симметричным ядром $K(x, s)=K(s, x)$ справедлива теория Гильберта—Шмидта. При $f=0$ ур-ние (3) имеет, по крайней мере, одно собств. число, собств. числа действительны; каждая пара собств. ф-ций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, соответствующих разл. собств. числам $\lambda_1\neq\lambda_2$, ортогональна, т. е. $\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=0$; ввиду действительности ядра можно выбирать и действит. собств. ф-ции; в каждом конечном интервале оси $\lambda$ находится конечное число собств. чисел, каждому собств. числу $\lambda_k$ соответствует конечное число $r_k$ линейно независимых собств. ф-ций. Множество всех собств. чисел ур-ния (3) наз. спектром этого ур-ния.