циал координаты, dx^i, понимают как «бесконечно малое приращение» и заменяют конечным, но достаточно малым приращением Δx^i. Поэтому Д. ф. оказывается ф-цией, зависящей от разностей координат двух «бесконечно близких» точек. Д. ф. можно определить в любом *многообразии*.

Важнейшим примером Д. ф. является метрика (квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками в *римановом пространстве*) $ds^2 = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i\, dx^j$, определяемая *метрическим тензором* g_{ij} (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, n — размерность многообразия). Произвольная симметричная Д. ф. степени r имеет вид $\omega = \omega_{i_1 \ldots i_r}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^{i_1} \ldots dx^{i_r}$ и определяется симметричным ковариантным тензорным полем ранга r (см. *Тензор*). Несимметричное ковариантное тензорное поле также определяет Д. ф. В этом случае входящие в определение формы дифференциалы (приращения) координат, $dx^i_{(1)}$, $dx^i_{(2)}$, $\ldots$ различны: $\omega = \omega_{i_1 \ldots i_r}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^{i_1}_{(1)} \ldots dx^{i_r}_{(r)}$. Напр., антисимметричный дискриминантный тензор $\eta_{i_1 \ldots i_n}$ определяет в n-мерном евклидовом пространстве форму степени n вида $\omega = \eta_{i_1 \ldots i_n} dx^{i_1}_{(1)} \ldots dx^{i_n}_{(n)} = \det \| dx^i_{(j)} \|$ — элемент объёма (это объём параллелепипеда, вдоль j-й стороны к-рого приращение координат равно $dx^i_{(j)}$).

При переходе к др. системе координат дифференциалы dx^i и коэф. Д. ф. $\omega_{i_1 \ldots i_r}$ меняются согласованно, так что сама форма ω остаётся неизменной (инвариантной).

Особенно важны т. н. внешние Д. ф., определяемые тензорами, антисимметричными по всем индексам. Для внешней Д. ф. степени (ранга) r используют запись

$$\omega = \omega_{i_1 \ldots i_r}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}, \qquad (*)$$

где $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$ (т. н. внешнее произведение дифференциалов) — формальное выражение, антисимметричное по всем индексам. Коэф. $\omega_{i_1 \ldots i_r}$ не обязательно антисимметричны, но в Д. ф. ω даёт вклад лишь антисимметричная часть, $\omega_{[i_1 \ldots i_r]}$. Выражение (*) пригодно лишь в том случае, если всё многообразие покрывается одной системой координат. В противном случае Д. ф. следует представить в виде суммы Д. ф., каждая из к-рых обращается в ноль за пределами одной координатной окрестности, т. е. представима в виде (*). Внешнюю Д. ф. ранга r обычно наз. r-формой. Внешняя Д. ф не может иметь ранг выше n (иначе она обращается в ноль). Формой ранга 0 по определению является ф-ция на многообразии (тензор нулевого ранга).

Каждой r-форме ω вида (*) можно сопоставить $(r+1)$-форму $d\omega = (\partial \omega_{i_1 \ldots i_r}/\partial x^i)\, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$, к-рая наз. внешней производной или внешним дифференциалом формы ω. Вторичное применение операции d обращает в ноль любую внешнюю Д. ф., т. е. $dd = 0$. Внешняя производная 0-формы, т. е. ф-ции, совпадает с её дифференциалом, $d\varphi = (\partial \varphi/\partial x^i)\, dx^i$, поэтому

$$d\omega = (d\omega_{i_1 \ldots i_r}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}.$$

Внешняя Д. ф. ω наз. замкнутой, если $d\omega = 0$, и точной, если существует такая форма σ, что $\omega = d\sigma$. В силу свойства $dd = 0$ всякая точная форма является замкнутой. Обратное справедливо не всегда, напр. это так на многообразии, покрываемом одной системой координат. Поэтому классы замкнутых форм, отличающихся на точные формы, можно использовать для характеристики *топологии* многообразия.

Для r-формы ω и s-формы σ определена $(r+s)$-форма

$$\omega \wedge \sigma = \omega_{i_1 \ldots i_r} \sigma_{j_1 \ldots j_s} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} \wedge \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_s},$$

наз. их внешним произведением и удовлетворяющая соотношениям:

$$\sigma \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \sigma,$$
$$d(\omega \wedge \sigma) = (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge (d\sigma).$$

В n-мерном евклидовом (псевдоевклидовом) пространстве, где при помощи метрич. тензора можно поднимать тензорные индексы, для внешних Д. ф. определяется операция перехода к дуальным Д. ф. (см. также *Дуальные тензоры*):

$$*\omega = \frac{1}{(n-r)!} \omega^{i_1 \ldots i_r} \eta_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_{n-r}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{n-r}},$$

переводящая r-форму в $(n-r)$-форму.

В римановом пространстве внеш. производную можно выразить через *ковариантные производные*,

$$d\omega = (\nabla_i \omega_{i_1 \ldots i_r})\, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r},$$

т. к. в силу симметричности *Кристоффеля символов* члены, отличающие ковариантную производную от обычной, не дают вклада в $d\omega$. Дуальная форма в римановом пространстве определяется как

$$*\omega = \frac{1}{(n-r)!} \omega^{i_1 \ldots i_r} \varepsilon_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_{n-r}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{n-r}},$$

где индексы подняты при помощи метрич. тензора, а вместо дискриминантного тензора использован тензор (точнее, тензорная плотность) Леви-Чивиты

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = |\det \| g_{ij} \||^{1/2} \eta_{i_1 \ldots i_n}.$$

Оператор $*$ в этом случае наз. оператором Ходжа. В римановом пространстве вводят также операцию внешнего кодифференциала, понижающего ранг формы:

$$\delta\omega = -r \nabla^i \omega_{[i i_1 \ldots i_{r-1}]} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{r-1}}.$$

Эти операции обладают след. свойствами:

$$dd = \delta\delta = 0, \quad **\omega = (-1)^{r(n+1)}\omega,$$
$$*d*\omega = -(-1)^{n(r+1)} \delta\omega,$$
$$*\delta*\omega = (-1)^{n(r+1)} d\omega, \quad (r \text{ — ранг } \omega).$$

На ориентируемых многообразиях корректно определён интеграл от внешней Д. ф. макс. ранга. Если n — размерность многообразия, то

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n} = \eta^{i_1 \ldots i_n} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

и поэтому n-форму ω можно представить в виде

$$\omega = \omega_{i_1 \ldots i_n} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n} = \sigma dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где $\sigma = \omega_{i_1 \ldots i_n} \eta^{i_1 \ldots i_n} = n!\, \omega_{1 \ldots n}$ (последнее равенство справедливо лишь в случае, когда величина $\omega_{i_1 \ldots i_n}$ антисимметрична по всем индексам). При замене координат величина σ преобразуется по закону

$$\sigma'(x'^1, \ldots, x'^n) = \det(\partial x^i/\partial x'^j)\, \sigma(x^1, \ldots, x^n),$$

совпадающему с законом преобразования плотности, если якобиан, $\det(\partial x^i/\partial x'^j)$, положителен. Поэтому величина σ ведёт себя как плотность для ориентируемых многообразий. Для такого многообразия интеграл от формы ω равен

$$\int \omega = \int \sigma(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n = n! \int \omega_{1 \ldots n}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n,$$

где фигурирует система координат положительной ориентации.

Если ω — нек-рая форма макс. ранга на ориентируемом многообразии, то умножая её на произвольную