или $G_1 \times G_2$. Если Г.-сомножители совпадают, то используется обозначение $G \otimes \ldots \otimes G = G^n$. Если Г.-сомножители коммутативны, то их прямое произведение — также коммутативная Г. В этом случае иногда вместо термина «прямое произведение» употребляют термин «прямая сумма» и вводят обозначение $G_1 \oplus G_2$ или $G_1 + G_2$.

**Топологические типы групп.** Обычно встречающиеся на практике Г. являются топологич. группами. Это значит, что для элементов Г. определено понятие предельного перехода, причём операция умножения и переход к обратному элементу непрерывны (т. е., если $g_n \to g$ и $g'_n \to g'$ при $n \to \infty$, то $g_n g'_n \to g g'$ и $g_n^{-1} \to g^{-1}$). С точки зрения топологии выделяются след. типы Г.

1. Дискретные группы. Это Г. с тривиальной топологией: последовательность $\{g_n\}$ сходится только тогда, когда она стабилизируется, т. е. все её элементы, начиная с нек-рого, равны, $g_N = g_{N+1} = \ldots$. Дискретными являются, напр., все конечные Г. и кристаллографич. Г. (Г. симметрии кристаллич. решёток).

2. Компактные группы. Это Г., в к-рых из каждой последовательности $\{g_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Компактные Г. имеют «конечный объём». Более точно, инвариантная мера Г. конечна в том и только в том случае, если Г. компактна (мера на Г. наз. инвариантной, если меры подмножеств $B$ и $gB$ равны для любого подмножества $B \subset G$ и элемента $g \in G$). Среди дискретных Г. компактными являются только конечные Г. Примеры компактных Г.: Г. вращений окружности и сферы (и вообще Г. движений компактны многообразий), Г. унитарных преобразований в конечномерном гильбертовом пространстве $U(n)$ и Г. ортогональных преобразований в конечномерном евклидовом пространстве $O(n)$.

3. Локально компактные группы. Это такие Г., в к-рых каждый элемент обладает компактной окрестностью. Этот класс Г. очень широк: он содержит все дискретные и все компактные Г., а также все конечномерные группы Ли (см. ниже). Характеристическим свойством локально компактной Г. является наличие инвариантной меры на ней (т. н. меры Хаара). К классу локально компактных относится бо́льшая часть Г., используемых в физике.

4. Группы Ли (ГЛ) отличаются тем, что их элементы можно охарактеризовать конечным набором числовых параметров, т. е. на Г. можно ввести систему координат (см. ниже).

5. Бесконечномерные группы Ли являются обобщением ГЛ. Элементы таких Г. характеризуются заданием бесконечного набора числовых параметров (или нек-рого количества ф-ций). В физике используют в осн. Г. линейных операторов в бесконечномерных линейных пространствах, Г. диффеоморфизмов гладких многообразий и Г. калибровочных преобразований. Теория таких Г. разработана в гораздо меньшей степени, чем теория обычных (конечномерных) ГЛ. Большинство результатов здесь носит отрицат. характер: эти Г. не являются локально компактными, на них не существует инвариантного интеграла, они могут не иметь полной системы унитарных представлений.

**Алгебраические типы групп.** С точки зрения алгебраич. (групповой) структуры среди всех Г. выделяют след. типы.

1. Коммутативные (абелевы) группы. Это Г., для к-рых любые два элемента перестановочны: $gg' = g'g$. Простейшими дискретными коммутативными Г. являются Г. целых чисел $\mathbb{Z}$ (групповая операция — сложение) и Г. $\mathbb{Z}_n$ вычетов по модулю $n$ (она получается из $\mathbb{Z}$, если элементом Г. считать класс целых чисел, отличающихся друг от друга на числа, кратные $n$). Простейшими непрерывными коммутативными Г. являются Г. $\mathbb{R}$ всех веществ. чисел (групповая операция — сложение) и Г. $\mathbb{T} = SO(2)$ поворотов плоскости.

Всякая связная коммутативная одномерная Г. изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{T}$ (связной наз. Г., любые два элемента к-рой можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей Г.). Всякая связная коммутативная ГЛ изоморфна прямому произведению таких Г., т. е. $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{T}^m$ ($\mathbb{T}^m$ — $m$-мерный тор). Дискретную Г. удобно описывать с помощью её образующих, т. е. таких элементов, что всякий элемент Г. представляется в виде произведения элементов-образующих. Г. с одной образующей (циклическая) изоморфна либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}_n$. Любая дискретная коммутативная Г. с конечным числом образующих является прямым произведением циклич. групп, т. е. изоморфна $\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}_{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}_{n_s}$ (набор чисел $n_1, \ldots, n_s$ не определяется однозначно заданием Г.). Важными для физики примерами коммутативных Г. являются Г. трансляций $n$-мерного евклидова или псевдоевклидова пространства, изоморфная $\mathbb{R}^n$, и Г. трансляций $n$-мерной решётки, изоморфная $\mathbb{Z}^n$.

2. Разрешимые группы. Группа $G$ наз. разрешимой, если в ней есть конечная цепочка вложенных друг в друга подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_{n-1} \supset G_n = \{e\}$, обладающая свойствами: а) $G_{k+1}$ — инвариантная подгруппа в $G_k$; б) фактор-группа $G_k/G_{k+1}$ коммутативна. Изучение разрешимых Г. в большой степени сводится к изучению коммутативных Г. Абелева ГЛ разрешима. Пример разрешимой Г.— группа движений евклидовой плоскости. Термин «разрешимая» отражает роль этих Г. в теории алгебраич. и дифференц. ур-ний. А именно: алгебраич. ур-ние $n$-й степени разрешимо в радикалах (соответственно обыкновенное дифференц. ур-ние $n$-го порядка разрешимо в квадратурах), если и только если его т. н. группа Галуа (соответственно группа Ли—Ритта—Колчина) разрешима.

3. Нильпотентные группы. Группа $G$ наз. нильпотентной, если она разрешима и, кроме того, для любого $g \in G$ и любого $g_i \in G_i$ элемент $g g_i g^{-1} g_i^{-1}$ (наз. коммутатором $g$ и $g_i$) лежит в $G_{i+1}$. Др. словами, все $G_i$ инвариантны в $G$ и группа $G_i/G_{i+1}$ принадлежит центру группы $G/G_{i+1}$.

4. Простые группы. Это класс Г., наиб. далёкий от класса коммутативных Г. Группа $G$ наз. простой, если она не содержит инвариантных подгрупп, отличных от самой Г. и единичной подгруппы. Примером простых Г. являются Г. $PSU(n)$ проективной унитарной симметрии. Прямое произведение простых Г. иногда наз. полупростой группой (полупростая Г. характеризуется отсутствием абелевых инвариантных подгрупп). Описание всех простых ГЛ известно (см. *Ли алгебра*), а описание всех конечных простых Г. близится к завершению.

5. Расширения групп. Пусть в группе $G$ есть инвариантная подгруппа $G_0$. Обозначим фактор-группу $G/G_0$ через $G_1$. Говорят, что $G$ является расширением $G_1$ с помощью $G_0$. Предположим, что в каждом смежном классе $gG_0$ можно выбрать по одному представителю так, чтобы произведение представителей было представителем. Тогда множество представителей образует подгруппу группы $G$, изоморфную $G_1$. В этом случае говорят, что расширение тривиально или что $G$ является полупрямым произведением $G_1$ на $G_0$. Напр., группа Пуанкаре является полупрямым произведением группы Лоренца на Г. 4-мерных трансляций, а Г. движений евклидова пространства — полупрямым произведением Г. вращений на Г. трансляций. В теории Г. разработаны методы (когомологии групп), позволяющие описывать все расширения с заданными $G_1$ и $G_0$. Для широкого класса Г. (напр., для конечных Г. и для связных ГЛ) доказано, что каждая из них является расширением полупростой Г. с помощью разрешимой Г. Большинство кристаллографич. Г. являются нетривиальными расширениями нек-рой конечной Г. вращений и отражений с