ур-ния Гамильтона на поверхности связей $\mathscr{M}$, определяемой соотношениями $\chi_m=0$, будут полностью эквивалентны лагранжевым ур-ниям движения, если их записывать для ф-ции $H_T=H+\sum\limits_m \lambda_m\chi_m(p,q)$, где λ_m — произвольные множители (вообще говоря, не выражающиеся только через переменные p, q):

$$\dot{q}_i=\{H_T,\ q_i\}=\frac{\partial H}{\partial p_i}+\sum_m \lambda_m \frac{\partial \chi_m}{\partial p_i}+\sum_m \{\lambda_m,\ q_i\}\chi_m,$$

$$\dot{p}_i=\{H_T,\ p_i\}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}-\sum_m \lambda_m \frac{\partial \chi_m}{\partial q_i}+\sum_m \{\lambda_m,\ p_i\}\chi_m.$$

На поверхности связей $\mathscr{M}$ не определённые скобки Пуассона λ_m с q_i и p_i не дают вклада в правые части.

Для непротиворечивости такого Г. ф. необходимо, чтобы временная эволюция не выводила за поверхность $\mathscr{M}$, т. е. чтобы $\dot{\chi}_m=\{H_T,\ \chi_m\}=0$ на $\mathscr{M}$. Если это требование не выполняется, необходимо сузить $\mathscr{M}$, наложив новые, «вторичные» связи. Процедуру их нахождения предложил П. Дирак (P. Dirac).

Для выполнения условия $\dot{\chi}_m=0$ на $\mathscr{M}$ достаточно, чтобы скобки $\{H_T,\ \chi_m\}$ оказались линейными комбинациями связей с нек-рыми коэф. $a_{mm'}(p,\ q)$:

$$\{H_T,\ \chi_m\}=\{H,\ \chi_m\}+\sum_{m'}\lambda_{m'}\{\chi_{m'}\chi_m\}=\sum_{m'}a_{mm'}\chi_{m'}=0$$
$$\text{на } \mathscr{M}. \qquad (3)$$

Это — система ур-ний на коэффициенты λ_m; если ранг μ матрицы $\{\chi_{m'},\ \chi_m\}$ на $\mathscr{M}$ меньше M, система определяет только μ из коэффициентов λ_m и возникает $\mathscr{M}-\mu$ условий непротиворечивости. Часть из них может автоматически удовлетворяться на $\mathscr{M}$, а остальные образуют $\varkappa_1\leqslant M-\mu$ «вторичных» связей $\chi_{M+k}=0$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa_1$. Их следует добавить к первичным, определив новую поверхность $\mathscr{M}_1$: $\chi_j=0$, $j=1,\ \ldots,\ M,\ \ldots,\ M+\varkappa_1$ и потребовав, чтобы $\dot{\chi}_j=0$ на $\mathscr{M}_1$. Процедура повторяется, пока не перестанут возникать новые вторичные связи. Полная совокупность связей $\chi_j=0$, $j=1,\ \ldots,\ M,\ \ldots,\ M+\varkappa_1+\ldots+\varkappa_r=J$ уже удовлетворяет требованиям непротиворечивости Г. ф.: $\dot{\chi}_j=\{H_T,\ \chi_j\}=0$ на суженной поверхности $\mathscr{M}^*$. Более того, все связи можно вставить в ф-цию Гамильтона: в качестве генератора эволюции «полная ф-ция Гамильтона» H_T не отличима на $\mathscr{M}^*$ от $H^*=H+\sum\limits_{j=1}^{J}\lambda_j\chi_j$.

Все связи χ_j разбиваются на два класса, с $K=J-S$ и S элементами, где S — (чётный) ранг матрицы $\{\chi_j,\ \chi_{j'}\}$ на $\mathscr{M}^*$. K связей удовлетворяют условиям

$$\{\chi_k,\ \chi_j\}=\sum_{j'=1}^{J}c_{kjj'}\chi_{j'}=0 \text{ на } \mathscr{M}^* \qquad (4)$$

и наз. связями I рода ($c_{kjj'}$ — нек-рые ф-ции переменных p, q). Остальные S связей — II рода — не удовлетворяют условиям (4), а матрица $\{\chi_S,\ \chi_{S'}\}$ для них имеет обратную, $\gamma_{SS'}$. Записанные для H^* условия непротиворечивости Г. ф.

$$\{H^*,\ \chi_j\}=\{H,\ \chi_j\}+\sum_{j'}\lambda_{j'}\{\chi_{j'},\ \chi_j\}=0 \text{ на } \mathscr{M}^*$$

фиксируют S из коэффициентов λ_j: $\lambda_S=-\{H,\ \chi_{S'}\}\gamma_{S'S}$. Подстановка этих значений λ_S в H^* эквивалентна замене скобки Пуассона скобкой Дирака

$$\{f,\ g\}^*=\{f,\ g\}-\sum_{S'S''}\{f,\ \chi_{S'}\}\gamma_{S'S''}\{\chi_{S''},\ g\}$$

в законе эволюции: $\dot{f}=\{H^*,\ f\}$ на $\mathscr{M}^*$. При этом, поскольку для любой ф-ции $f(p,\ q)$ выполняются автоматически соотношения $\{\chi_S,\ f\}=0$, связи II рода можно наложить явно, считая $\chi_S=0$ во всех ф-циях f.

Конкретная реализация процедуры Дирака неоднозначна: вместо связей II рода χ_j можно взять любой эквивалентный набор $\tilde{\chi}_j=\sum\limits_{j'}A_{jj'}(p,\ q)\chi_{j'}$, если только $\det A_{jj'}\neq 0$. В частности, в принципе можно подобрать $A_{jj'}$ так, чтобы матрица $\{\tilde{\chi}_S,\ \tilde{\chi}_{S'}\}$ приобрела канонич. вид $\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}$, где I — единичная матрица ранга $S/2$. Затем канонич. преобразованием в полном фазовом пространстве Г можно перейти от первонач. переменных $(p,\ q)$ к новым $(\tilde{\chi}_S;\ p',\ q')$, в к-рых первые $S/2$ пар — связи II рода. В новых переменных скобка Дирака приобретёт пуассонов вид: $\{f,g\}^*_{p,\ q}=\{f,g\}_{p',\ q'}$, а связи II рода окажутся полностью исключёнными, повлияв лишь на выбор переменных p', q'. В этих переменных эволюцией управляет ф-ция Гамильтона $H'=H+\sum\limits_{k=1}^{K}\lambda_k\chi_k$, включающая лишь связи I рода, находящиеся в инволюции (т. е. скобки Пуассона связей выражаются через линейную комбинацию самих связей):

$$\{\chi_k,\ \chi_{k'}\}=\sum_{k''}c_{kk'k''}\chi_{k''}. \qquad (5)$$

Гамильтоново описание ведётся теперь в $(2N-S)$-мерном пространстве Г$'$ канонич. переменных p', q'. В нём участвуют K произвольных ф-ций $\lambda_k(t)$; изменение λ_k не приводит к изменению состояния или закона эволюции, а сводится к канонич. калибровочному преобразованию, генератором к-рого является связь χ_k. Наблюдаемыми величинами естественно считать не все ф-ции $f(p',\ q')$ на поверхности $\mathscr{M}'$, определённой условиями $\chi_k=0$, а лишь те, на эволюции к-рых не сказывается произвол в λ_k. Для этого достаточно, чтобы $\{f,\ \chi_k\}=0$ на $\mathscr{M}'$, т. е.

$$\{f,\ \chi_k\}=\sum_{k'}d_{kk'}\chi_{k'}, \qquad (6)$$

при этом $\dot{f}=\{H',\ f\}=\{H,\ f\}$ на $\mathscr{M}'$. Такие ф-ции зависят не от всех $2N-S-K$ координат на $\mathscr{M}'$. Если считать (6) системой дифференц. ур-ний для f, то (5) будут условиями её разрешимости и f определится своими значениями на подмногообразии Г* нач. условий, размерности $2N-S-2K=2N-J-K$. Г* обычно задают на $\mathscr{M}'$ ур-ниями $\eta_k(p',\ q')=0$, наз. дополнит. условиями. Как и в случае связей II рода, переходом к эквивалентным связям $\tilde{\chi}_k$ и выбором дополнит. условий всегда можно добиться того, чтобы $\{\tilde{\chi}_k,\ \tilde{\chi}_{k'}\}=0$, $\{\tilde{\chi}_k,\ \eta_{k'}\}=\delta_{kk'}$, $\{\eta_k,\ \eta_{k'}\}=0$, т. е. чтобы новые связи и дополнит. условия годились на роль канонич. переменных. Канонич. преобразование в Г$'$ от $(p';\ q')$ к $\{\chi_k,\ p^*;\ \eta_k,\ q^*\}$ достраивает остальные переменные p^*, q^*, служащие независимыми координатами на физ. фазовом пространстве Г*. Для ф-ций, удовлетворяющих системе ур-ний (6), скобка Пуассона выражается только через p^*, q^*: $\{f,\ g\}_{p',\ q'}=\{f,\ g\}_{p^{*\prime},\ q^{*\prime}}$. Т. о., существуют два эквивалентных описания гамильтоновой системы со связями: в полном фазовом пространстве Г со скобкой Дирака $\{f,\ g\}^*_{p,\ q}$ и ф-цией Гамильтона H^* и в физ. фазовом пространстве Г* со скобкой Пуассона $\{f,g\}_{p^*,\ q^*}$ и ф-цией Гамильтона $\tilde{H}=H\big|_{\chi_j=0,\ \eta_k=0}$. Первый способ технически проще, поскольку на практике не всегда удаётся явно построить необходимые для второго способа канонич. преобразования. Однако принципиальная возможность второго способа служит обоснованием метода *функционального интеграла* для систем со связями.