няется применимость понятия луча, но его характеристики, в частности законы рефракции, зависят от амплитуды В. (в подобных случаях говорят о приближении нелинейной геом. оптики). Так, если показатель преломления световой В. n зависит от её интенсивности I, то возникают эффекты саморефракции, когда без всякой внеш. неоднородности лучи искривляются в сторону больших n. При этом, если $n(I)$ — возрастающая ф-ция, то из-за такой саморефракции лучей в область больших I интенсивность ещё больше растёт, т. е. эффект имеет кумулятивный характер — возникает самофокусировка В. (см. *Самофокусировка света*). Особую сложность здесь представляет описание поля в области фокусов и каустик, где обычно наиб. сильно сказываются как нелинейность (в приближении геом. оптики амплитуда растёт неограниченно), так и дифракция.

Описание одноврем. влияния нелинейности и дифракции на распространение почти гармонич. волнового пучка в нелинейной диспергирующей среде, в к-рой малая нелинейная добавка к $n \sim I$ (что типично для мн. задач *нелинейной оптики*, физики плазмы и др.), проводится обычно в рамках нелинейного ур-ния Шрёдингера, обобщающего ур-ния (24) и (29). Если В., распространяясь вдоль направления x, представляет собой модулированное в пространстве колебание: $\psi = A(\boldsymbol{r})\exp(i\omega t - ikx)$, то это ур-ние имеет вид, обобщающий (24):

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{v}{2i\omega}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right) + i\beta A|A|^2. \qquad (30)$$

Ур-ние (30), как и (24), описывает стационарный волновой пучок. В отсутствие нелинейности ($\beta = 0$) пучок расширяется из-за поперечной диффузии. Нелинейность может полностью скомпенсировать это уширение, тогда В. будет распространяться без уменьшения амплитуды ($\partial A/\partial x = 0$), как бы «пробивая» сама себе волноводный канал. Такое решение возможно при $\beta > 0$ (фокусирующая нелинейность). Диссипация и разл. рода неустойчивости приводят к постепенному разрушению нелинейных волноводов. Нелинейность может и «перекомпенсировать» дифракц. расходимость, что и означает самофокусировку пучка. Эффекты самофокусировки (и обратные им — самодефокусировки) играют особенно важную роль в нелинейной оптике и квантовой радиофизике; в частности, они ограничивают возможности создания мощных лазеров с широкими волновыми пучками, поскольку в определ. условиях плоская В. оказывается неустойчивой по отношению к возмущениям её волнового фронта и распадается на отд. пучки («нити»).

В средах без дисперсии или со слабой дисперсией эффекты нелинейной рефракции и дифракции ещё сложнее, т. к. волновое поле не остаётся гармоническим и профиль В. непрерывно деформируется, вплоть до образования ударных В., солитонов и др. Такие процессы типичны, напр., для *нелинейной акустики* (сюда относятся, в частности, задачи о распространении взрывных В. сильного звука в атмосфере и океане). Здесь также широко применяется приближение коротких волн, позволяющее, в частности, проследить за нелинейными искажениями В. вдоль лучей (нелинейная геом. акустика). При описании В. как квазиплоского волнового пучка справедливо приближённое ур-ние, обобщающее ур-ние (27) в отношении учёта дифракции:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + (v_0 + \varepsilon\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}\right] = -\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right), \qquad (31)$$

где x — продольная, y, z — поперечные координаты. При $\beta = 0$ это ур-ние часто наз. ур-нием Хохлова — Заболотской, а при $\nu = 0$ — ур-нием Кадомцева — Петвиашвили.

Ур-ние (31) ещё весьма сложно для решения; чтобы получить простое описание эффектов, применяют более грубые упрощения. Так, при фокусировке волнового пучка в фокальную область приходит нелинейно искажённая В., однако в этой области, несмотря на рост нелинейности, ею иногда можно пренебречь, т. к. дифракц. эффекты оказываются сильнее. В результате процесс может быть описан поэтапно: сначала нелинейная фокусировка, затем линейная дифракция. Для диспергирующей среды без потерь ($\nu = 0$) ур-ние (31) может иметь решения в виде двумерных солитонов.

Взаимодействие волн. Поскольку для нелинейных В. принцип суперпозиции не выполняется, допустимо говорить о взаимодействии В., т. е. о тех эффектах, к-рые возникают при их совместном распространении. В соответствии с разл. способами описания одного и того же поля, понятие взаимодействия часто трактуется неоднозначно. В случаях, когда описывается эволюция В. как целого, обычно говорят о «самовоздействии» (напр., деформация профиля простой В., или деформация огибающих для В. с узким спектром). Вместе с тем эти же процессы можно рассматривать как результат взаимодействия разл. спектральных составляющих (напр., гармоник) поля (см. выше). Выбор представления зависит от конкретных условий задачи. В средах с малой нелинейностью и сильной дисперсией особенно эффективно протекает взаимодействие почти гармонич. В., если выполняются те или иные резонансные условия. Пусть, напр., в среде возбуждены две В. с частотами ω_1 и ω_2 и волновыми векторами $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$. Из-за нелинейности возникнут возмущения с комбинац. частотами $\omega_m = m\omega_1 \pm n\omega_2$ и волновыми векторами $\boldsymbol{k}_{mn} = m\boldsymbol{k}_1 \pm n\boldsymbol{k}_2$, где m и n — целые числа. Наиб. эффективно будут возбуждаться те из них, к-рые окажутся в резонансе с нормальными В. среды, т. е. для к-рых отношение ω_{mn}/k_{mn} совпадает с фазовой скоростью одной из таких В. Простейшим примером служит трёхволновое взаимодействие, когда одновременно выполняются соотношения $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, $\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3$ (условия синхронизма). Эти соотношения выражают законы сохранения энергии $\hbar\omega$ и импульса $\hbar\boldsymbol{k}$ при распадах и слияниях квантов поля: либо квант первой В. (накачки) распадается на два др. кванта, либо происходит слияние этих квантов в один. В одномерном случае изменение комплексных амплитуд таких В. описывается связанными ур-ниями:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial t} + v_{\text{гр}1}\frac{\partial A_1}{\partial x} &= -i\sigma_1 A_2 A_3,\\
\frac{\partial A_2}{\partial t} + v_{\text{гр}2}\frac{\partial A_2}{\partial x} &= i\sigma_2 A_1 A_3^*,\\
\frac{\partial A_3}{\partial t} + v_{\text{гр}3}\frac{\partial A_3}{\partial x} &= i\sigma_3 A_1 A_2^*,
\end{aligned} \qquad (32)$$

где $v_{\text{гр}}$ — групповые скорости, σ — постоянные коэф. нелинейности, * — обозначение комплексного сопряжения. Из ур-ний (32) следует, что суммарная энергия всех трёх В. сохраняется, однако [напр., для гармонических в пространстве В., когда $A = A(t)$] происходит периодич. перекачка энергии от первой В. («накачки») к двум другим, и обратно. В «вырожденном» случае взаимодействия гармонич. В. с её 2-й гармоникой (т. е. когда $\omega_2 = \omega_3 = \omega$, $A_2 = A_3$) возможен (в отсутствие потерь) и полный переход энергии из осн. частоты во 2-ю гармонику (но не наоборот). В системах с обратной связью (напр., резонаторах) возможна параметрич. генерация В. на более низких частотах ω_2 и ω_3 за счёт энергии высокочастотной «накачки» на частоте ω_1 (см. *Параметрический резонанс*). Подобные эффекты наблюдаются для В. в плазме, световых и акустич. В. в кристаллах и т. д.; они используются, напр., в *параметрических генераторах света* (см. также *Вынужденное рассеяние света*, *Мандельштама — Бриллюэна рассеяние*). Аналогичные резонансные взаимодействия возможны для четырёх и более В.

В известном смысле, другой предельный случай составляют «однократные акты» взаимодействия локализованных (уединённых) нелинейных образований —