диссипация или что-либо другое, учитывающее «подкачку» энергии в В. Для каждого из подобных факторов можно ввести меру по тем же рецептам, что и при оценке нелинейности. Это позволяет соотносить их конкурирующую роль, что отражается и в классификационной терминологии: напр., говорят о системах с сильной нелинейностью, но слабой дисперсией и слабой диссипацией.

Особенности волновых процессов в нелинейных системах удобно пояснить на примере одномерных возмущений в энергетически пассивной, слабонелинейной однородной среде, когда спектральный язык ещё не утрачивает свою пригодность. В линейном приближении поле В. есть суперпозиция нормальных гармонич. В. с частотами ω и волновыми числами k, подчиняющихся дисперс. ур-нию (8). А в нелинейном режиме гармонич. В. взаимодействуют, обмениваясь энергией и порождая В. на новых частотах. В частности, «затравочное» возмущение на частоте ω сопровождается появлением высших гармоник на частотах 2ω, 3ω и т. д. Энергия колебаний как бы «перекачивается» вверх по спектру. Эффективность этого процесса зависит от дисперс. свойств системы и может быть велика даже при очень слабой нелинейности. Действительно, если дисперсии нет, то В. всех частот распространяются синхронно с одинаковыми $v_ф$, и их взаимодействие будет иметь резонансный, накапливающийся характер, поэтому на достаточно больших длинах (в масштабе λ) перекачка энергии может осуществляться весьма эффективно. Если дисперсия велика, то фазовые скорости гармонич. возмущений, имеющих разные частоты, не совпадают, следовательно, фаза их взаимных воздействий будет быстро осциллировать, что приведёт на больших длинах к ничтожному результирующему эффекту. Наконец, возможны специальные, промежуточные случаи, когда в системе с сильной дисперсией только две (или несколько) «избранные» В. с кратными частотами имеют одинаковые $v_ф$ и поэтому эффективно взаимодействуют. В ряде случаев достигается своеобразное спектральное равновесие, когда амплитуды всех синхронных гармоник сохраняются неизменными и суммарное поле имеет вид стационарной бегущей В. вида (1), при этом в случае сильной дисперсии ф-ция $f(x-vt)$ близка к синусоиде, а при слабой — она может содержать участки резкого изменения поля (импульсы, «ступеньки» и др.), поскольку число гармоник в её спектре велико.

Простые волны. Роль нелинейности «в чистом виде» хорошо видна в предельном случае, когда и дисперсия, и диссипация полностью отсутствуют, т. е. все гармонич. моды бегут с одинаковыми скоростями. Если в ур-нии В. (2) считать скорость v зависящей от волновой переменной ψ, то его решение сводится к функциональному соотношению вида $\psi=F[x-v(\psi)t]$, описывающему простую В. или волну Римана. Профиль её непрерывно деформируется (рис. 14) так, что каждая

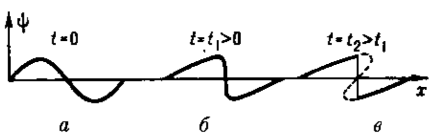

Рис. 14. Эволюция простой волны (*а*), образование «перехлёста» (*б*) и разрыва ударной волны (*в*).

точка с фиксир. значением ψ движется с пост. скоростью $v(\psi)$. На спектральном языке это и означает непрерывный рост амплитуд гармоник, синхронно взаимодействующих между собой. Эволюция профиля В. сопровождается растяжением одних его участков и сокращением других, причём крутизна последних растёт вплоть до полного «перехлёста» за счёт обгона одних точек профиля другими. Иногда такая неоднозначность имеет реальный смысл. Напр., если пучок электронов пролетает через промежуток между двумя сетками, к к-рым приложено перем. напряжение, то в зависимости от фазы пролёта электроны приобретают разные скорости, и ур-ние (2) описывает В. скорости электронов [так что $v(\psi)=\psi$]. Образование крутого фронта В. означает догон и группировку электронов, а «перехлёст» — обгон и разгруппировку. В электронике этот эффект наз. клистронным. Аналогичным образом может вести себя поток машин на дорогах («транспортные волны») и нек-рые др. «кинематические» волновые процессы.

Динамич. поведение волновых систем описывается, по крайней мере, двумя ур-ниями 1-го порядка, в простейшем варианте — парой нелинейных телеграфных ур-ний, имеющих вид (4), где $a=a(\varphi,\psi)$, $b=b(\varphi,\psi)$. Их частными решениями являются две простые В. вида

$$\varphi=F_\varphi[x\mp v(\varphi,\psi)t],\quad \psi=F_\psi[x\mp v(\psi,\varphi)t],\qquad (26)$$

где $v=\sqrt{ab}$, $dF_\varphi/dF_\psi=\pm\sqrt{a/b}$. Так ведут себя, напр., давление и скорость в газодинамике, напряжение и ток в нелинейных эл.-магн. линиях и т. д. Здесь появление «перехлёста», т. е. неоднозначности решения, уже не имеет физ. смысла. Некорректность устраняется обычно учётом дополнит. физ. факторов (дисперсии, потерь), вступающих в силу в областях резкого изменения поля и приводящих к повышению порядка исходных ур-ний.

Ударные волны. Приближённые ур-ния, описывающие эволюцию В. в системах с малыми нелинейностью, дисперсией, диссипацией, получаются посредством добавления в «первичное» ур-ние (2) малых членов, учитывающих эти факторы. Весьма широкий класс таких В. описывается т. н. ур-нием Бюргерса — Кортевега — де Фриса:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+v_0\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\varepsilon\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3},\qquad (27)$$

где ε, ν и β — константы, отражающие влияние соответственно нелинейности, диссипации и дисперсии (в теории нелинейных В. оба последних фактора иногда относят к дисперсионным, т. к. степень их влияния на процесс зависит от его пространственных и временных масштабов). При медленных изменениях поля членами с ν и β можно пренебречь, и возмущение ведёт себя как простая В. с $v(\psi)=v_0+\varepsilon\psi$. Но на участках с увеличением крутизны профиля эти «дисперсионные» члены постепенно «вмешиваются» в движение, предотвращая возможность «перехлёста». Дальнейший процесс зависит от соотношения двух последних слагаемых в ур-нии (27); при этом особую роль играют стационарные В. Хотя они и не реализуются в точности, но во мн. случаях в В. формируются образования, близкие к стационарным. Если $\beta=0$, то (27) наз. ур-нием Бюргерса. Его стационарное решение имеет вид:

$$\psi=\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)-\frac{1}{2}\Delta\psi\,\mathrm{th}\left[\frac{\varepsilon\Delta\psi}{2\nu}(x-Vt)\right],\qquad (28)$$

где $V=v_0+\varepsilon(\psi_1+\psi_2)/2$, $\Delta\psi=\psi_2-\psi_1$, ψ_1 и ψ_2 — постоянные. Это решение описывает структуру стационарной ударной волны малой амплитуды. Она имеет вид монотонного перепада между двумя пост. значениями ψ_1 и ψ_2 (рис. 15). Характерная длина перепада $\delta\sim 2\nu/\varepsilon\Delta\psi$ тем меньше, чем больше его величина $\Delta\psi$ и чем меньше коэф. потерь ν.

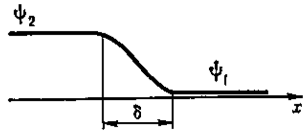

Рис. 15. Профиль стационарной ударной волны.

Ударная В. (28) и есть истинное квазистационарное решение, «вписываемое» в простую В. малой амплитуды в области «перехлёста». Если, напр., в нач. момент задана синусоидальная В. с достаточно большими длиной и амплитудой, то она будет превращаться в почти пилообразную с узким ударным фронтом, а затем, по мере затухания, снова возвращаться к синусоидальной форме. На спектральном языке это означает, что высшие гармоники сначала растут, а затем затухают, и тем быстрее, чем выше их пространственные частоты; для слабых и коротких В. нелинейные эффекты вообще не успевают проявиться из-за сильного затухания.