или в случае распространения В. в произвольном направлении

$$\psi(\boldsymbol{r},\ t) = A \sin(\omega t - \boldsymbol{kr} - \varphi_0). \qquad (6б)$$

Здесь A — амплитуда, Φ — полная фаза В., ω — угл. частота, $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор; его модуль $|\boldsymbol{k}|=k$ наз. волновым числом; φ_0 — пост. сдвиг фазы (часто именуемый просто фазой). Ф-ция $\psi(\boldsymbol{r},\ t)$ периодична как во времени (с периодом $T=2\pi/\omega$), так и в пространстве (с периодом $\lambda=2\pi/k$, наз. длиной В.) (рис. 1). Поверхности постоянных Φ — волновые фронты представляют собой плоскости, перпендикулярные вектору $\boldsymbol{k}$ и перемещающиеся вдоль $\boldsymbol{k}$ с фазовой скоростью $v_\text{ф}=\omega/k$. В любом другом направлении, отклонённом от $\boldsymbol{k}$ на угол α, скорость перемещения фазовых фронтов равна $v_\text{ф}/\cos\alpha > v_\text{ф}$; это означает, что, в отличие от $\boldsymbol{k}$, $v_\text{ф}$ не является вектором (иначе скорость вдоль направления α равнялась бы $v_\text{ф}\cos\alpha$, т. е. проекции соответствующего вектора).

Помимо (6) применяется также комплексная запись В.:

$$\psi = Ae^{i\omega t - i\boldsymbol{kr}} = A \exp i(\omega t - \boldsymbol{kr}), \qquad (7)$$

где A — комплексная амплитуда. Выражение (7) объединяет два волновых движения, описываемых реальной и мнимой частями. Запись (7) удобна тем, что операция дифференцирования сводится для неё к простому умножению: $\partial/\partial t$ заменяется на $i\omega$, а $\partial/\partial\boldsymbol{r}$ на $-i\boldsymbol{k}$. Это позволяет перейти от исходного дифференц. (или даже более общего — интегродифференц.) ур-ния В. к алгебраическому:

$$\omega = \omega(\boldsymbol{k}), \qquad (8)$$

к-рое наз. законом дисперсии или дисперсионным ур-нием. Фактически оно полностью характеризует волновые свойства любой линейной однородной среды (системы), поскольку любое малое возмущение в ней можно представить в виде разложения Фурье по плоским гармонич. В. Дисперс. ур-ние может быть положено в основу классификации волновых процессов в линейных средах.

В общем случае ур-ние (8) имеет неск. независимых решений (ветвей), каждое из к-рых соответствует *нормальной волне* (моде). Если для заданного направления величина ω пропорциональна k, то фазовая скорость $v_\text{ф}=\omega/k$ не зависит от ω и k, т. е. дисперсия отсутствует. В частности, волновое ур-ние (5) при $f=0$ или его одномерный вариант (3) при подстановке в него (7) даёт дисперс. ур-ние

$$(\omega^2/v^2) - k^2 = 0 \text{ или } \omega = \pm kv. \qquad (9)$$

Для систем с дисперсией тоже можно выделить более или менее общие типы ур-ний В. Так, при описании эл.-магн. В. в плазме, а также нек-рых видов мезонных полей используют *Клейна—Гордона уравнение*:

$$\Delta\psi - (1/c^2)\,\partial^2\psi/\partial t^2 + \varkappa^2\psi = 0,$$

где c и $\varkappa$ — постоянные. Ему соответствует дисперс. ур-ние вида

$$\omega = \pm\sqrt{c^2k^2 + c^2\varkappa^2} \qquad (10)$$

(в случае эл.-магн. В. в плазме величина $c\varkappa = \omega_p$ имеет смысл плазменной частоты, а c — скорости света в вакууме). Из ф-лы (10) видно, что в таких системах могут распространяться лишь В. с частотой выше нек-рого значения $\omega_\text{кр} = \varkappa c$. Значениям $\omega < \omega_\text{кр}$ отвечают мнимые k; амплитуда такой В. экспоненциально убывает вдоль оси x, а энергия в ней не переносится. Однако через слой конечной протяжённости энергия В. может «просачиваться» благодаря появлению возмущений, отражённых от задней границы слоя (подобно туннельному эффекту в квантовых системах). Такой дисперсией обладают также В. в эл.-магн. волноводах в виде трубы произвольного сечения. В этом случае $k_\perp = \varkappa$ — поперечное, а $k = k_x$ — продольное волновое число (постоянная распространения). Так, для волновода прямоугольного сечения $\varkappa = \pi\sqrt{m^2/a^2 + n^2/b^2}$, a и b — стороны сечения, m и n — произвольные целые числа. Каждой паре чисел m и n отвечает своя мода (рис. 3). Фазовые скорости таких В. (рис. 4) превышают скорость света в заполняющей волновод среде. Если эта среда вакуум, то

$$v_\text{ф} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1-\varkappa^2c^2/\omega^2}} > c. \qquad (11)$$

Эти волны наз. быстрыми, в отличие от медленных, для к-рых $v_\text{ф} < c$; медленные эл.-магн. В. могут распространяться, напр., в диэлектриках и разного рода периодич. структурах *(замедляющих системах)*. В случае $\varkappa=0$ (т. н. главная мода) В. не обладает дисперсией (см. ниже).

Иной дисперсией обладают В. на поверхности жидкости. В водоёме пост. глубины H такие В. без учёта поверхностного натяжения описываются дисперс. ур-нием

$$\omega = \sqrt{gk \operatorname{th} kH}, \qquad (12а)$$

где g — ускорение свободного падения. Отсюда для коротких В. ($kH = 2\pi H/\lambda \gg 1$) следует:

$$\omega = \sqrt{gk}. \qquad (12б)$$

Фазовая скорость этих В. $v_\text{ф} = \omega/k = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ растёт с их длиной λ. Для длинных В. ($kH \ll 1$) справедливо др. приближение:

$$\omega \approx vk - \gamma k^3, \qquad (12в)$$

где $v = \sqrt{gH}$, $\gamma = vH/3$.

Дисперс. ур-ния можно использовать для «конструирования» упрощённых динамич. ур-ний движения, приближённо совпадающих с исходными в той или иной области параметров. В частности, отправляясь от (12в), получают приближённое ур-ние для вертик. смещений поверхности жидкости ψ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + v\frac{\partial\psi}{\partial x} + \gamma\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} = 0, \qquad (13)$$

к-рое наз. линейным *Кортевега—де Фриса уравнением*; оно отличается от простейшего ур-ния В. (2) последним слагаемым с производной третьего порядка, отражающим наличие дисперсии.

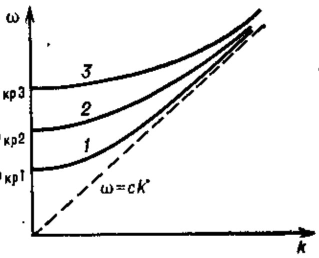

Рис. 3. Дисперсионные зависимости $\omega(k)$ для первых трёх мод прямоугольного волновода.

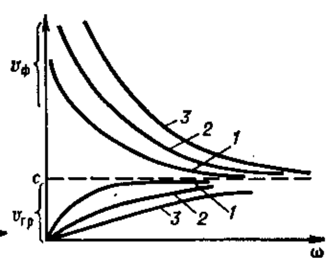

Рис. 4. Зависимости фазовой $v_\text{ф}$ и групповой $v_\text{гр}$ скоростей от частоты для тех же мод, что и на рис. 3.

Свойства В., вообще говоря, зависят от направления их распространения. Если в дисперс. ур-нии (8) ω не зависит от направления $\boldsymbol{k}$, а только от его модуля, то система (среда) наз. изотропной, в противном случае — анизотропной. Если волновое поле характеризуется векторной переменной $\boldsymbol{\psi}$, то параметры В. могут зависеть от поляризации В., т. е. от ориентации вектора $\boldsymbol{\psi}$ относительно $\boldsymbol{k}$. Различают продольные и поперечные плоские В. Если вектор $\boldsymbol{\psi}$, характеризующий В., колеблется в одном направлении, то такое поле и такая В. наз. линейно поляризованными, если он описывает эллипс или окружность, то соответственно — эллиптически или циркулярно поляризованными (см. *Поляри-*