здесь μ и ε — относительные магн. и электрич. проницаемости сред.

Поток энергии, переносимой бегущей волной в линии без потерь, выражается через В. с. так же, как мощность, выделяемая в сопротивлении цепи с сосредоточенными параметрами: $P=R_B|I|^2/2=|V|^2/2R_B$. Т. о., В. с. играет роль внутр. сопротивления линии передачи. Если линию передачи подсоединить к импедансу Z_H (про такую линию говорят, что она нагружена на импеданс Z_H), то коэф. отражения по мощности равен $|\Gamma|^2=\left|\frac{Z_H-R_B}{Z_H+R_B}\right|^2$, где Γ — отношение амплитуд отражённой и падающей волн. Полное согласование ($\Gamma=0$) достигается при $Z_H=R_B$, что в системах с сосредоточенными параметрами эквивалентно равенству внутр. сопротивления источника R_B импедансу нагрузки Z_H.

Понятие В. с. переносят и на произвольное распределение волновых полей любой природы, в т. ч. и на отношение их амплитуд в бегущих волнах сложной структуры. Напр., в электродинамике это отношение напряжённостей электрич. и магн. полей, в акустике — отношение давления к скорости частиц среды и т. д. При этом равноправно используют также термин поверхностный (полевой) *импеданс*. *М. А. Миллер.*

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ — линейное однородное ур-ние в частных производных гиперболич. типа:

$$\Box\psi\equiv\Delta\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\equiv\Delta\psi-c^{-2}\psi_{tt}=0, \quad (1)$$

где t — время, c — пост. параметр, имеющий размерность скорости, $\Box$ — *Д'Аламбера оператор*, $\Delta\equiv\nabla^2$ — *Лапласа оператор*. Иногда вместо $\Box$ в (1) используют оператор Лоренца $c^2\Delta-\partial^2/\partial t^2$. Векторное В. у. предусматривает применение оператора $\Box$ к каждой из декартовых компонент вектора; при переходе к произвольным координатам используют тождество $\Delta\equiv\nabla\operatorname{div}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}$.

Первоначально В. у. получено в одномерном варианте применительно к описанию движения упругой струны практически одновременно Д. Бернулли (D. Bernoulli), Ж. Д'Аламбером (J. d'Alembert) и Л. Эйлером (L. Euler) в 40-е гг. 18 в. Бернулли выразил его решение через тригонометрич. ряды, Д'Аламбер и Эйлер записали общее решение в виде двух перемещающихся в пространстве со скоростью c возмущений (волн):

$$\psi=f_1(x+ct)+f_2(x-ct), \quad (2)$$

что и дало основание назвать ур-ние (1) волновым. Эквивалентность тригонометрич. представления решения В. у. функциональной записи (2) доказана Ж. Фурье (J. Fourier) в 1824.

Впоследствии понятие волнового возмущения претерпело значит. изменения (см. *Волны*), поэтому (1) нельзя считать универсальным и единственным В. у.; оно охватывает отнюдь не все виды движений, квалифицируемых сейчас как волновые. Иногда, напр., термин «уравнение волны» применяется к упрощённому уравнению 1-го порядка

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\pm\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}=0, \quad (3)$$

описывающему волну (*моду*), распространяющуюся только в одном направлении. Ур-ние (3) можно интерпретировать как закон сохранения величины ψ, поэтому его иногда наз. «кинематическим», в отличие от «динамического» ур-ния 2-го порядка или от системы двух ур-ний 1-го порядка (см., напр., *Телеграфные уравнения*).

Ур-ния (1) и (3) порождают достаточно разветвлённое семейство ур-ний, также причисляемых по совр. терминологии к категории волновых. Простейшим обобщением, сохраняющим внеш. облик ур-ния (1), является введение в него зависимости скорости c от координат, $c=c(\boldsymbol{r})$ (неоднородные среды), от времени (параметрические среды), от самой ф-ции ψ (квазилинейные среды) или от частоты ω её изменения во времени, $c^{-2}\partial^2\psi/\partial t^2\to\psi\omega^2/c^2(\omega)$ (*диспергирующие среды*).

В. у. является одной из наиб. употребит. матем. моделей в физике. Оно описывает почти все разновидности малых колебаний в распределённых механич. системах (продольные звуковые колебания в газе, жидкости, твёрдом теле; поперечные колебания в струнах и т. п.). Ему удовлетворяют компоненты эл.-магн. векторов и потенциалов, и, следовательно, мн. эл.-магн. явления (от квазистатики до оптики) в той или иной мере объясняются свойствами его решений.

Инвариантные преобразования. Ур-ние (1) инвариантно (т. е. сохраняет свою структуру) относительно линейных преобразований координат и времени, объединённых в 10-параметрическую *Пуанкаре группу* (3 вращения вокруг пространственных осей, 3 равномерных движения вдоль них, объединяемые в *Лоренца преобразования*, а также 4 смещения начала координат и времени). В 1910 Г. Бейтмен (H. Bateman) показал, что В. у. инвариантно относительно 15-параметрич. конформной группы, содержащей в качестве подгруппы группу Пуанкаре. Из др. инвариантных преобразований следует выделить:

$$x'=f_1(\xi)+f_2(\eta),\quad ct'=f_1(\xi)-f_2(\eta), \quad (4)$$

где f_1 и f_2 — произвольные ф-ции своих аргументов: $\xi=x+ct$, $\eta=x-ct$. Прямые $\xi=\text{const}$, $\eta=\text{const}$ наз. характеристиками; в этих координатах одномерное В. у. (1) факторизуется $(\partial^2/\partial x^2-c^{-2}\partial^2/\partial t^2)\psi\equiv\partial^2\psi/\partial\xi\partial\eta=0$. Следовательно, преобразование (4) означает, что любая ф-ция характеристики сама является характеристикой.

Разделение переменных. Ур-ние (1) всегда допускает разделение переменных, т. е. факторизацию решения по координатам и времени $\psi(\boldsymbol{r},t)=u(\boldsymbol{r})v(t)$, при этом

$$\Delta u+\omega^2c^{-2}u=0, \quad (5)$$

$$v_{tt}+\omega^2v=0, \quad (6)$$

т. е. для ф-ции $v(t)$ получается ур-ние осциллятора (6), а для $u(\boldsymbol{r})$ — трёхмерное *Гельмгольца уравнение*, в двумерном случае его называют также ур-нием мембраны, а в одномерном — ур-нием осциллятора (но уже пространственного, а не временнóго).

В декартовых координатах В. у. (1) можно свести к набору четырёх ур-ний осцилляторов: трёх пространственных $\varphi_{xx}+k_x^2\varphi=0$ и одного временнóго (6). Постоянные разделения k_x, k_y, k_z можно интерпретировать как компоненты нек-рого вектора $\boldsymbol{k}$, наз. *волновым вектором*, поскольку плоская волна вида

$$\psi=\exp(i\omega t\pm i\boldsymbol{kr}) \quad (7)$$

является собств. решением (1) при условии: $k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=\omega^2c^{-2}$. Комплексная запись (7) включает в себя сразу два решения, соответствующие действительной и мнимой частям. Помимо декартовой системы координат, переменные в ур-нии Гельмгольца (5) разделяются в цилиндрических (полярной, эллиптич. и параболич.), сферической и сфероидальных (вытянутой и сплюснутой) системах.

Неоднородное волновое ур-ние содержит в правой части ф-цию источника

$$\Box\psi=f(\boldsymbol{r},t) \quad (8)$$

и наз. Д'Аламбера ур-нием. Его решение состоит из собств. мод — решений однородного ур-ния (1) и из вынужденного решения, связанного с источником. В силу линейности (8) справедлив *суперпозиции принцип*, поэтому ф-цию f можно разложить по любой полной системе ф-ций (обычно выраженных через координаты, допускающие разделение переменных) или представить в виде интеграла (суммы) по элементарным источникам. Часто в качестве элементарного источника берётся *дельта-функция* Дирака, а соответствующее решение наз. *Грина функцией*. Всплеск от элементарно-