Из ф-лы (5) и свойств симметрии коэффициентов Клебша — Гордана вытекают свойства симметрии 6 j-символов: величина 6 j-символа не меняется при перестановке столбцов, а также при перестановке любых двух элементов верхней строки с расположенными под ними двумя элементами нижней строки, напр.:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_{12} \\ j & j_3 & j_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j & j_{12} \\ j_1 & j_2 & j_{23} \end{Bmatrix}. \qquad (7)$$

Имеют место также соотношения симметрии Редже, к-рые не сводятся к простой перестановке параметров 6 j-символа [1—3]. В частности,

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & s-j_2 & s-j_{12} \\ j_3 & s-j & s-j_{23} \end{Bmatrix}, \qquad (8)$$

где $s={}^1/_2\,(j_2+j_{12}+j+j_{23})$.

Наряду с 6 j-символами в приложениях часто используются коэффициенты Рака $W(abcd;\ ef)$, к-рые отличаются от 6 j-символов только выбором фазового множителя:

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} = (-1)^{a+b+c+d}\,W\,(abcd;\ ef). \qquad (9)$$

Подробнее о свойствах 6 j-символов и коэффициентов Рака см. в [1—4]. Таблицы алгебраич. и численных значений 6 j-символов приводятся в [1, 2].

Лит.: 1) Варшалович Д. А., Москалёв А. Н., Херсонский В. К., Квантовая теория углового момента, Л., 1975; 2) Юцис А. П., Бандзайтис А. А., Теория момента количества движения в квантовой механике, Вильнюс, 1977; 3) Биденхарн Л., Лаук Дж., Угловой момент в квантовой физике, пер. с англ., т. 1—2, М., 1984; 4) Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б., Классические ортогональные полиномы дискретной переменной, М., 1985; 5) Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А., К теории $3nj$-коэффициентов, «Ядер. физика», 1975, т. 21, с. 1135.

С. К. Суслов.

ВИГНЕРА ФУНКЦИИ (D-функции, обобщённые сферические функции) — функции $D^j_{mm'}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, к-рые описывают преобразование волновой ф-ции квантовой системы с определ. угловым моментом j и определ. проекцией m момента на ось z при повороте системы координат на углы Эйлера α, β, γ:

$$\psi'_{jm} = (\hat{D}^j\psi_j)_m = \sum_{m'} D^j_{mm'}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\,\psi_{jm'},$$

(j, m и m' — одновременно целые или полуцелые числа, причём $j\geqslant 0$; $m,\ m'=-j,\ -j+1,\ \ldots,\ j$). В. ф. определяются ф-лами

$$D^j_{mm'}(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (-1)^{m-m'}\,e^{-i\,(m\alpha+m'\gamma)}\times$$
$$\times\left[\frac{(j+m)!\,(j-m)!}{(j+m')!\,(j-m')!}\right]^{1/2}\cdot\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m-m'}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{m+m'}\times$$
$$\times P^{(m-m',\ m+m')}_{j-m}(\cos\beta),$$

где

$$P^{(\alpha,\ \beta)}_n(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\,(1-z)^{-\alpha}\,(1+z)^{-\beta}\,\frac{d^n}{dz^n}\times$$
$$\times\left[(1-z)^{n+\alpha}\,(1+z)^{n+\beta}\right] —$$

полиномы Якоби (см. *Ортогональные полиномы*). Ф-ции $D^j_{mm'}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ являются матричными элементами неприводимого унитарного представления группы вращений трёхмерного пространства. Для них справедливы соотношения ортогональности:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\beta\,\sin\beta \int_0^{2\pi} d\gamma\, D^{j^*}_{m_1m_2} D^{j'}_{m_1'm_2'} =$$
$$= \frac{8\pi^2}{2j+1}\,\delta_{jj'}\,\delta_{m_1m_1'}\,\delta_{m_2m_2'},$$
$$\sum_{m''} D^{j^*}_{mm''} D^j_{m'm''} = \delta_{mm'},$$

а также теорема сложения:

$$D^j_{mm'}(\theta_2\theta_1) = \sum_{m''} D^j_{mm''}(\theta_2)\,D^j_{m''m'}(\theta_1),$$

где $\theta_i=(\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i)$ — углы Эйлера для двух последоват. вращений системы координат, $\theta_2\theta_1$ — углы Эйлера для произведения этих вращений. В. ф. впервые исследованы Ю. Вигнером (E. Wigner) в 1931. В нек-рых случаях В. ф. можно выразить через *сферические функции*.

Лит.: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974; Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К., Квантовая теория углового момента, Л., 1975; Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, 2 изд., М., 1984.

ВИГНЕРА ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ — матрица плотности в смешанном координатно-импульсном представлении, предложенном Ю. Вигнером (E. Wigner) в 1932.

В. ф. р. связана с *матрицей плотности* в координатном представлении $\rho_N(x,\ x',\ t)$ соотношением

$$f_N(x,\ p,\ t) = (2\pi\hbar)^{-3N}\int \rho_N(x-\xi/2,$$
$$x+\xi/2,\ t)\,\exp\{i\hbar^{-1}(p\xi)\}\,d\xi,$$

где $x=(x,\ \ldots,\ x_N)$, $\xi=(\xi,\ \ldots,\ \xi_N)$ — $3N$-мерные векторы. Такое определение смешанного представления со сдвинутыми координатами удобно тем, что В. ф. р. не может быть комплексной (в отличие от обычного координатно-импульсного представления). Переход от ρ_N к f_N соответствует преобразованию Вейля. В. ф. р. позволяет найти распределение частиц по координатам или по импульсам с помощью интегрирования по p или по x:

$$\int f_N(x,\ p,\ t)\,dp = \rho_N(x,\ x,\ t),$$
$$\int f_N(x,\ p,\ t)\,dx = \rho_N(p,\ p,\ t).$$

Однако сама В. ф. р. не имеет смысла плотности вероятности, т. к. может быть отрицательной. Подобные матрицы плотности иногда наз. «квазивероятностями». В. ф. р. удовлетворяет ур-нию движения, аналогичному квантовому ур-нию Лиувилля для матрицы плотности. С помощью В. ф. р. можно построить одно-, двух- и т. д. частичные приведённые В. ф. р., проводя интегрирования по части её аргументов. Для этих частичных В. ф. р. можно получить цепочку зацепляющихся ур-ний, удобных для построения ур-ний переноса.

В. ф. р. используют для описания квантовомеханич. состояний системы мн. частиц, близких к классич. состояниям, для доказательства предельного перехода от квантовомеханич. описания к классическому. Она удобна также при выводе кинетич. ур-ния для пространственно неоднородной системы.

Лит.: Wigner E., On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, «Phys. Rev.», 1932, v. 40, p. 749; Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978, гл. 3; Климонтович Ю. Л., Статистическая физика, М., 1982, гл. 17; Гроот С. Р. де, Сатторп Л. Г., Электродинамика, пер. с англ., М., 1982.

Д. Н. Зубарев.

ВИГНЕРА — ЗЕЙТЦА ЯЧЕЙКА — наиболее часто используемая *элементарная ячейка* (примитивная) кристалла. Для построения В.— З. я. любой узел кристаллич. решётки следует соединить со всеми соседними трансляционно эквивалентными ему узлами и провести через середины соответствующих отрезков перпендикулярные к ним плоскости. Многогранник, содержащий выбранный узел и ограниченный этими плоскостями, представляет собой В.— З. я. Все точки внутри многогранника лежат ближе к центру ячейки, чем к любой др. трансляционно эквивалентной центру точке кристалла. Примеры В.—З. я. для кубич. объёмноцентрированного (ОЦК) и гранецентрированного (ГЦК) кристаллов приведены на рис. В. —З. я. полностью определяет трансляц. структуру кристалла и имеет