достоверное событие Ω. **Формула полной вероятности**

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)$$

для любого события A позволяет вычислить его вероятность по условным вероятностям $P(A \mid B_i)$, найти к-рые часто значительно легче, чем $P(A)$. Формулу Бейеса

$$P(B_j \mid A)=\frac{P(A \mid B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)}$$

широко используют в статистике, события B_i при этом наз. гипотезами, $P(B_i)$ — их априорными вероятностями, а $P(B_j \mid A)$ — апостериорной вероятностью B_j (вероятность справедливости гипотезы B_j, если известно, что наступило событие A).

События A и B наз. **независимыми**, если условная вероятность одного из них при условии наступления другого равна его безусловной вероятности, или, что то же, если $P(A \cap B)=P(A)P(B)$. Аналогично события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ наз. независимыми, если для любых $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, $k \leqslant n$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})=P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k}). \quad (1)$$

(Отметим, что из попарной независимости событий отнюдь не вытекает их независимость в совокупности.) Последнее равенство наз. **теоремой умножения вероятностей**. Ф-ла (1) останется справедливой, если нек-рые из A_i заменить в обеих частях на дополнительные к ним события $\bar{A}_i$.

Пример. Пусть события $A_1, \ldots, A_n$ независимы и имеют каждое вероятность p. Эти события можно интерпретировать как «успехи» в наблюдении нек-рого случайного события в n независимых испытаниях. Тогда вероятность наступления ровно m успехов равна

$$C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \text{ где } C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \quad (2)$$

Действительно, можно взять $\Omega=\{(i_1, \ldots, i_n)$, все $i_k=0$ или $1\}$, где $i_k=1$ соответствует наступлению A_k, а $i_k=0$ — его ненаступлению. Наступлению m успехов благоприятствуют те исходы $(i_1, \ldots, i_n)$, у к-рых среди i_k ровно m единиц; всего таких исходов C_n^m, а вероятность каждого такого исхода в силу независимости A_k, свойства (4) и ф-лы (1) равна $p^m(1-p)^{m-n}$.

К этому примеру непосредственно примыкает одна из первых (и важнейших) предельных теорем В. т. — **теорема Бернулли** (простейшая форма *больших чисел закона*), согласно к-рой вероятность значит. уклонения частоты успехов ν от вероятности p при больших n становится сколь угодно малой. Т.о., рассматриваемая матем. модель случайных явлений приводит к согласующемуся с практич. наблюдениями выводу о стабилизации частот случайных событий около их вероятностей.

Скорость стремления частоты ν к p оценивают с помощью **теоремы Лапласа** (частный случай *центральной предельной теоремы*). С ростом n вероятность $P(a<(\nu-p)\,n^{1/2}[p(1-n)]^{-1/2}<b)$ стремится к $\Phi(b)-\Phi(a)$, где $\Phi(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x}\exp(-y^2/2)\,dy$ — ф-ция стандартного нормального распределения (*Гаусса распределения*).

Частота ν является типичным примером др. объекта В. т. — *случайной величины*. Так называется любая ф-ция X, ставящая в соответствие каждому исходу ω_i число x_i, при этом среди x_i могут быть и равные. Конкретный вид отображения $\omega_i \to x_i$ часто несуществен, достаточно знать лишь распределение случайной величины X, т. е. набор разл. возможных значений x_i и приписываемых им вероятностей. *Математическое ожидание* случайной величины X определяется как число $\mathbf{M}X=\sum x_i p_i$.

Пример. Пусть в предыдущем примере $X_k=i_k$ для исхода $(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n)$, $k=1, \ldots, n$, т. е. случайные величины X_k принимают на $N=2^n$ исходах лишь два возможных значения: 0 и 1, с вероятностями $1-p$ и p соответственно, так что $\mathbf{M}X=p$. Частота успехов $\nu=n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k$, при этом $P(\nu=m/n)$ равна (2), т. е. νn имеет *биномиальное распределение*.

В этом примере рассматривался набор случайных величин $X=(X_1, \ldots, X_n)$, или **случайный вектор**. Основной характеристикой случайного вектора, как и случайной величины, является его распределение (совместное распределение случайных величин $X_1, \ldots, X_n$), т. е. набор возможных его значений $(x_1, \ldots, x_n)$ и их вероятностей, равных вероятностям совмещений событий $\{X_1=x_1\}, \ldots, \{X_n=x_n\}$. Если эти события для всех наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ оказываются независимыми, то случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ также наз. **независимыми**. О важнейших числовых характеристиках случайных величин см. *Дисперсия*, *Моменты* случайной величины, *Корреляции коэффициент*.

Аксиоматика теории вероятностей. Элементарная В. т. недостаточна для описания случайных явлений уже в простых ситуациях. Модель с конечным числом исходов непригодна, напр., для понятия «случайно выбранной на отрезке точки». Такого рода трудности позволяет преодолеть схема, предложенная А. Н. Колмогоровым в 1933 и ставшая с тех пор общепринятой.

Осн. элементами этой аксиоматич. схемы являются: пространство элементарных событий Ω, к-рое может быть множеством произвольной природы, нек-рый класс $\mathcal{F}$ его подмножеств, т. е. множеств элементарных событий, к-рые наз. событиями, и числовая ф-ция P на $\mathcal{F}$, к-рая удовлетворяет условиям 1)—3) и наз. вероятностью. Для корректности матем. модели требуют, чтобы класс $\mathcal{F}$ был **σ-алгеброй** (т. е. чтобы само Ω было событием и, значит, принадлежало $\mathcal{F}$, чтобы наряду с любым событием A классу $\mathcal{F}$ принадлежало бы и его дополнение $\bar{A}$ и чтобы для любой бесконечной последовательности событий $A_1, A_2, \ldots$ их объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ также было событием), а ф-ция P была **счётно-аддитивной**, т. е. чтобы вместе со свойством 3) имело место следующее: если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно несовместны, то $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$ [это означает, что P является **мерой** на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$]. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ наз. **вероятностным пространством**. Очевидно, что элементарная В. т. является на самом деле частным случаем реализации этой схемы; её осн. определения остаются в силе и в общем случае. Одно из существ. отличий заключается в определении случайной величины $X=X(\omega)$: требуют, чтобы множества $\{\omega\colon X(\omega)<x\}$ принадлежали классу $\mathcal{F}$ при всех x. Для таких ф-ций X можно определить абстрактный **интеграл Лебега**, к-рый и наз. матем. ожиданием случайной величины X. Задавать случайную величину X удобнее всего с помощью её ф-ции распределения $F(x)=P(X<x)$.

Предельные теоремы. Осн. задача В. т. — находить по вероятностям одних случайных событий вероятности других, связанных к.-л. образом с первыми. Типичный пример — определение вероятности события $A_n=\{a_n<X_1+X_2+\ldots+X_n<b_n\}$, где X_k — независимые случайные величины, имеющие одно и то же известное распределение. Однако при больших n непосредств. вычисление вероятности $P(A_n)$ становится очень трудоёмким и практически невозможным. В таких случаях полезны предельные теоремы В. т., к-рые позволяют найти приближённые значения искомых вероятностей. Так, если в нашем примере матем. ожидание $\mathbf{M}X_k=p$ и $a_n=an$, $b_n=bn$, то в силу закона больших чисел при любых $a<p<b$ вероятность $P(A_n)$ с ростом n стремится к 1. Центральная предельная теорема уточняет этот результат: если дисперсия $\mathbf{D}X_k=\sigma^2$ ко-